Universidade de Aveiro Departamento de Matemática,
2016

Carla Maria Correia de Carvalho Ramos Costa

As sucessões no ensino secundário - uma abordagem com recursos digitais

Carla Maria Correia de Carvalho Ramos Costa

As sucessões no ensino secundário - uma abordagem com recursos digitais

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica da Professora Auxiliar Doutora Paula Oliveira do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e da Professora Doutora Dina Seabra, Professora Adjunta da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Águeda da Universidade de Aveiro.

o júri / the jury

presidente / president

Professor Doutor João Pedro Antunes Ferreira da Cruz

Professor Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Professora Doutora Maria Teresa Mesquita da Cunha Machado Malheiro

Professora Auxiliar da Universidade do Minho- Escola de Ciências

Professora Doutora Maria Paula de Sousa Oliveira

Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro (Orientadora)

agradecimentos

Costuma dizer-se que muitas coisas da nossa vida acontecem quando menos esperamos. E, a realização deste mestrado tão pensado e desejado, mas “deixado para um dia“ não foi exceção.

Um especial e muito forte obrigada ao "homem da minha vida"pelo apoio que sempre me deu e pelo desejo constante que exteriorizava em me ver bem sucedida! Esse incentivo permanente não me permitiu desanimar, vacilar ou desviar-me da meta final! Claro que, a minha filha, tem aqui um papel estrutural pois olhar para ela e ver o orgulho que ela sentia em mim deu-me a força necessária para continuar. Obrigada filha!.

Quero ainda agradecer à minha família, de forma particular aos meus pais e aos meus avós, a quem devo tudo aquilo que sou e que tenho, sem esquecer todos os outros que, de uma forma ou de outra sempre preencheram afetuosamente a minha vida.

Às minhas orientadoras, as Professoras Dina Seabra e Paula Oliveira, por quem há muito tenho uma grande admiração e que me estenderam várias vezes a mão quando precisei de ajuda e orientação.

À Universidade de Aveiro, por todos os bons momentos que me proporcionou, por todas as pessoas que me permitiu conhecer e por todos os conhecimentos e saberes de que me dotou.

Por fim e não menos importante, A DEUS, que me deu força e a coragem para chegar até aqui, ajudando-me a transpor os obstáculos que foram surgindo no decorrer da caminhada.

Palavras-chave sucessões, sucessões monótonas, sucessões limitadas, progressão geométrica, progressão aritmética, limites de sucessões, infinitésimos, infinitamente grandes, número de Neper

Resumo Neste trabalho foi feito um estudo detalhado sobre o tema Sucessões, lecionado ao nível do 11° ano de escolaridade no currículo de Matemática A.

Foram elaborados alguns exercícios parametrizados usando o Sagemath e em particular o pacote de software MEGUA desenvolvido na Universidade de Aveiro, disponibilizados online na plataforma SIACUA, que servem de suporte a este tema.

Keywords

sequences, monotone sequences, bounded sequences, geometric progression, arithmetic progression, limits of sequences, infinitesimal, big infinitives, Neper number.

Abstract

The purpose of this thesis is a detailed study of sequences, curricular issue in Mathematics for 11th grade studis in High School.
There were created parameterized exercises, supporting this topic, using Sagemath and the MEGUA package, developed in University of Aveiro, which are available online in SIACUA platform.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

As sucessões de números reais são um dos tópicos do ensino secundário lecionado ao nível do 11º ano de escolaridade. Apesar do conceito de sequência ser introduzido em níveis de escolaridade anteriores, só nesta altura do ensino secundário se assume como um capítulo a ser estudado em detalhe.

Usualmente é lecionado no último período, sendo talvez essa uma das razões pela qual os alunos sentem alguma dificuldade ao lidar com este conceito.

Neste trabalho o objetivo é a construção de recursos digitais de apoio ao ensino das sucessões acompanhada da elaboração de um texto didático onde se apresentam os resultados mais importantes do tema em questão.

A criação de recursos digitais de apoio ao ensino por um lado pretende estimular e incentivar nos alunos o gosto pela matemática proporcionando-lhes materiais para um estudo continuado, com recurso a diferentes exercícios, potenciando assim novas oportunidades de aprendizagem e que resulta numa maior consolidação/aplicação de conhecimentos; por outro lado fornecer aos professores materais online com correção automática e resoluções detalhadas, que sendo parametrizados, permitem uma vasta panóplia de exercícios diferentes mas com objetivos científicos e pedagógicos comuns, gerando diferentes chaves para um mesmo exercício.

O formato utilizado na elaboração dos exercícios foi o de escolha múltipla, estando uma opção correta em quatro possíveis. As resoluções detalhadas de cada exercício são, no nosso entender uma ferramenta muito potente na consolidação de conhecimentos. Frequentemente o estudo dos alunos tem por base a resolução de exames e testes, em detrimento dos manuais escolares.

Neste sentido, a elaboração de resoluções detalhadas e justificadas com os resultados teóricos que permitem resolver os exercícios são uma mais valia, quer na compreensão do conceito em si, quer na elaboração de uma resposta adequada e correta a uma questão.
Computadores, tablets e smartphones devem ser entendidos nos dias de hoje como qualquer outra ferramenta de estudo, tal como uma régua, um lápis ou um caderno. Usados de forma adequada e eficiente, estes meios tecnológicos podem contribuir de forma fundamental para que os estudantes aprendam e sejam ensinados. Uma vez que na atualidade, as novas tecnologias são incontornáveis, a sua utilização no ensino de Matemática é uma recomendação expressa dos programas de Matemática.
"A tecnologia no Ensino Secundário deve portanto, ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas e para o exercício de certos procedimentos (...)"[1].
O ritmo diferenciado de aprendizagem dos alunos é um dos principais desafios que se coloca atualmente aos professores. Para dar resposta a este desafio surgem os mais variados projetos de estudo autónomo. É o caso do projeto Megua & Siacua.
Ambos os projetos foram criados por docentes da Universidade de Aveiro, por forma a ser um complemento ao estudo para os estudantes do Ensino Superior, no entanto vários alunos do Mestrado em Matemática para Professores da Universidade de Aveiro, usaram-nos para criar e disponibilizar recursos de apoio ao ensino básico e secundário.
O principal objetivo do projeto MEGUA é criar e partilhar bases de dados de exercícios parametrizados e respetivas resoluções detalhadas, construídos sobre a plataforma Sage Mathematics usando a biblioteca de software com o mesmo nome do projeto.

A consulta de arquivos de exercícios permite uma rápida elaboração de material didático (questões de verdadeiro/falso e escolha múltipla bem como de desenvolvimento), a sua modificação ou adaptação a novos contextos, para apoio às aulas (fichas de trabalho) e à avaliação (testes escritos ou on line) [2].

O projeto Siacua tem como finalidade o desenvolvimento de um sistema para apoio ao estudo autónomo, disponibilizando os recursos criados no MEGUA ou noutras plataformas, de forma interativa, fornecendo um feedback imediato ao estudante e ao professor, de acordo com as respostas dadas às questões que lhe são apresentadas. Esse feedback existe ao nível da questão que é gerada ao acaso, sendo o estudante informado de imediato se acertou ou errou podendo ter acesso à resolução detalhada do exercício caso erre ou opte por não responder[2].

Nesta plataforma o estudante tem acesso ao seu progresso na aprendizagem dos conceitos em estudo, sob a forma de barras de progresso no conhecimento. À medida que o estudante responde a diferentes questões o seu conhecimento aumenta ou diminui, consonate a resposta dada é correta ou errada.

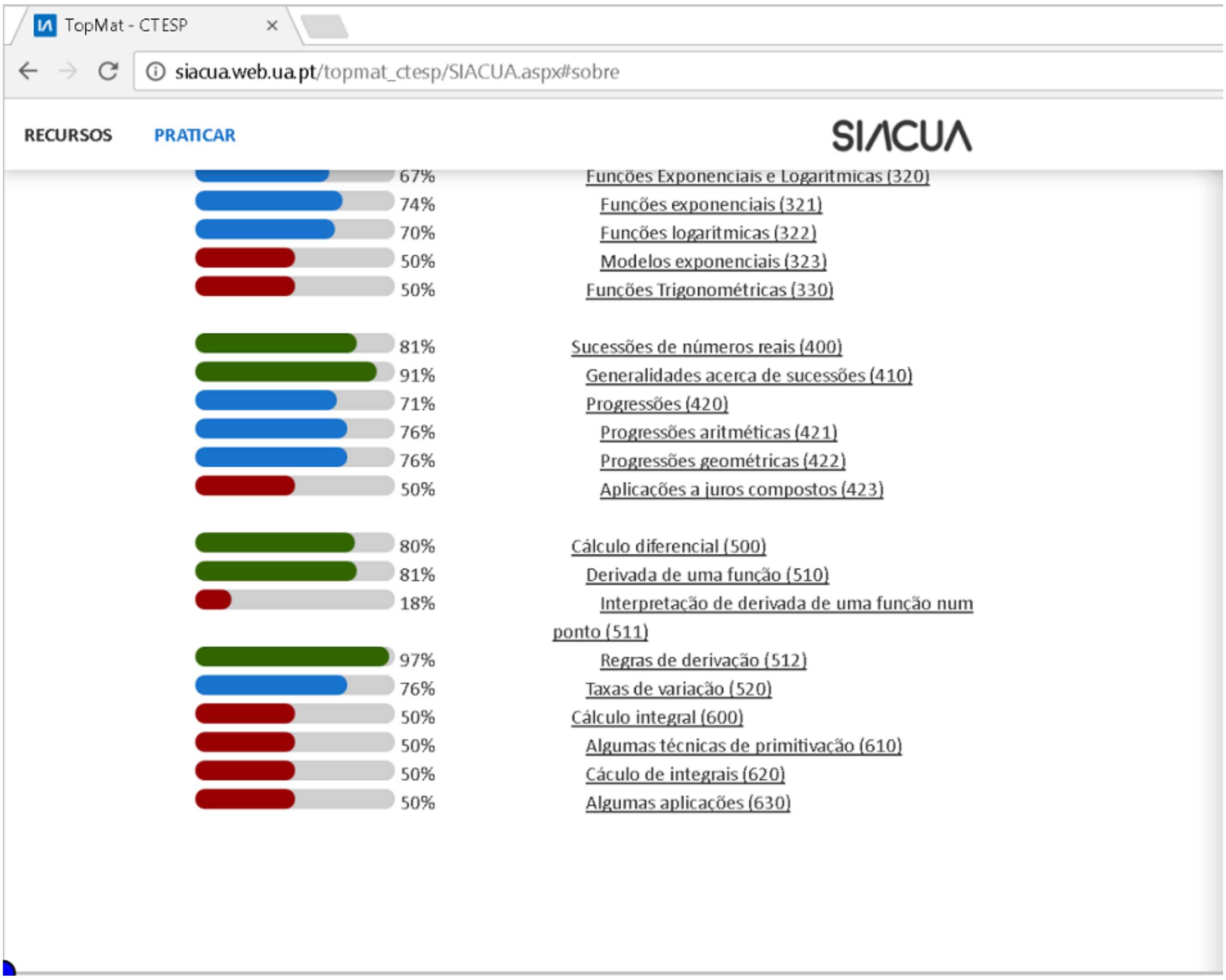

Figura 1.1: Barras de progresso na plataforma SIACUA.

Esta dissertação consta de quatro capítulos, o primeiro é a Introdução e o último Conclusões. No corpo da tese consideram-se dois capítulos. No capítulo 2 analisa-se a forma como a temática das sucessões é abordada no programa nacional de Matemática, com especial destaque no ensino secundário. Começa-se por fazer uma análise às orientações curriculares sobre o tema em estudo desde o primeiro ciclo até ao Ensino Secundário.

No terceiro capítulo analisa-se o tema das Sucessões no Ensino Secundário. Em cada secção é apresentado um ou vários conceitos em particular, seguido de exemplos e exercícos parametrizados criados no MEGUA. A título ilustrativo, cada exercício é acompanhado de uma concretizaçao dos parâmetros.

Capítulo 2

Análise Curricular

O programa de matemática homologado a 17 de junho de 2013 e as metas curriculares da matemática homologadas a 3 de agosto de 2012 preveem a introdução do pensamento algébrico logo no primeiro ciclo, com o reconhecimento de sequências e regularidades. Um dos objetivos associado ao pensamento algébrico passa pelos alunos reconhecerem regularidades e compreender relações entre números ou imagens. O outro objetivo é explorar autonomamente regularidades, formulando e testando conjeturas. Estes objetivos promovem um maior envolvimento dos alunos na construção do seu conhecimento.
Ainda no primeiro ciclo, este programa defende que os alunos devem procurar estabelecer relações simples entre números, procurando a exploração de situações relacionadas com regularidades de acontecimentos, formas, desenhos e conjuntos de números. Os alunos podem, ainda, formular por si próprios, "(...) regularidades em sequências de números finitas ou infinitas (estas usualmente chamadas sucessões) e podem também observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente, fazendo conexões entre a geometria e a aritmética"[1].
Neste ciclo de ensino os alunos devem ainda ser capazes de resolver problemas envolvendo a determinação de termos de uma sequência dada a lei de formação e a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida.
Para o segundo ciclo, as indicações metodológicas propõem que o trabalho com sequências seja continuado, inventando ou continuando sequências de números, pois a "resolução de problemas que incluam a investigação de regularidades numéricas constitui um aspecto a privilegiar da

didática dos números neste ciclo de ensino "[1].

Como nota, o programa propõe estudar regularidades com potências, por exemplo regularidades do algarismo das unidades de potências com a mesma base e expoentes diferentes. Se no primeiro ciclo os alunos desenvolvem o pensamento algébrico quando investigam sequências numéricas e padrões geométricos, já no segundo ciclo ampliam e aprofundam esse trabalho, explorando padrões, determinando termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação pelo estudo da relação entre os seus termos. Como conceitos específicos, o programa refere que o estudo de sequências envolve o trabalho com números e operações, proporcionando o estabelecimento de relações e a explicitação de leis de formação.

No segundo ciclo os alunos devem ser capazes de resolver problemas envolvendo a determinação de termos de uma sequência definida por uma expressão geradora ou dada por uma lei de formação que permita obter cada termo a partir dos anteriores, conhecidos os primeiros termos; determinar expressões geradoras de sequências definidas por uma lei de formação que na determinação de um dado elemento recorra aos elementos anteriores; resolver problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida e formulá-la em linguagem natural e simbólica.

Já para o terceiro ciclo, e apesar de nada estar referido nos objetivos gerais de aprendizagem sobre sequências e regularidades, nos objetivos específicos há indicação de que os alunos devem ser capazes de: relacionar sequências e sucessões como funções; identificar, dado um número natural n , uma "sequência de elementos" como uma função de domínio $\{1, 2, \ldots, n\}$ e utilizar corretamente a expressão "termo de ordem n da sequência" e "termo geral da sequência"; identificar uma "sucessão" como uma função de domínio $\mathbb{N}$, designando por u_n a imagem do número natural n por u e utilizar corretamente a expressão "termo de ordem n da sucessão" e termo geral da "sucessão"; representar gráficos cartesianos de sequências numéricas; e resolver problemas envolvendo sequências e sucessões e os respetivos termos gerais.

Analisando o novo programa e Metas para o Ensino Básico verifica-se que se quebra a continuidade do tema no ensino básico: surge pela primeira vez no 2º ano, reaparece no 6º ano e no 7º ano estabelece uma separação entre o conceito de sequência e sucessão.[1]

Quanto às indicações metodológicas, em todos os ciclos é feita uma referência concreta e sustentada do recurso às tecnologias que dispomos em computadores e calculadoras para a realização de cálculos complexos que auxiliem e agilizem a exploração de regularidades numéricas em tarefas de investigação ou na resolução de problemas. Ou seja, em situações em que o objetivo não seja o desenvolvimento de capacidades de cálculo, mas de outras aprendizagens que a tarefa envolva. Para o 3º ciclo, o programa explicita que no computador deve recorrer-se à folha de cálculo excel e outras applets, que permitam experiências com números e regularidades numéricas, bem como o trabalho com situações reais que, sem estes recursos seriam difíceis de realizar/executar, ou, a serem possíveis de realizar, perder-se-ia imenso tempo nos cálculos intermédios até se poderem tirar conclusões dos valores obtidos. O programa defende ainda que deve tirar-se partido das possibilidades de experimentação que os computadores oferecem nos domínios geométrico e numérico e no tratamento de dados.

Existe uma quebra deste desenvolvimento temático no ensino secundário. Se nos focarmos sobre o Programa de Matemática do Ensino Secundário de Matemática A, apenas no 11º ano é feita uma abordagem às sucessões.

No 11º ano, a resolução de problemas permite chegar ao conceito de sucessão, aceder à compreensão de propriedades importantes de sucessões particulares e especialmente úteis, como é o caso da primeira definição do número e, número de Neper, e do estudo intuitivo da sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ num contexto de modelação matemática. No desenvolvimento da temática das sucessões neste ano de ensino, os alunos estudam ainda propriedades como monotonia, limitação, majorantes, minorantaes, progressões aritméticas e geométricas, limites (envolvendo infinitamente grandes e infinitamente pequenos), limites de sucessões e convergência, convergência de sucessões monótonas e limitadas, problemas de limites com progressões e estudo de casos simples usando sucessões definidas por recorrência.

No 12º ano de escolaridade o programa prevê o cálculo de juros compostos e resolução de problemas envolvendo juros compostos, com base na sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

No programa de Matemática B do Ensino Secundário, somente no 12º ano é que são abordadas as sucessões e destas, apenas as progressões são trabalhadas.

No que respeita ao programa de MACS (Matemática Aplicada às Ciências Sociais), a situação é semelhante aos casos anteriormente analisados: existe um enorme recurso às capacidades das calculadoras, onde exploram as potencialidades das novas tecnologias associando-as à Estatística e Probabilidades, aos problemas matemáticos da área financeira e de juros, mas não existe qualquer referência às sucessões nem ao juro composto.

Capítulo 3

Sucessões de números reais

Neste trabalho são explorados conteúdos teóricos, constrói-se, em cada secção, exercícios parametrizados envolvendo os conceitos e seguidamente apresenta-se uma concretização de cada exercício.

3.1 Conceito de sucessão

Definição 3.1. *Uma sucessão de números reais, ou simplesmente sucessão é uma função u que a cada número natural n faz corresponder um número real u_n,*

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

Os valores da função $u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots, u_n, \ldots$ são os termos da sucessão:

- ao valor u_1 chama-se termo de ordem 1 ou 1º termo da sucessão;
- ao valor u_2 chama-se termo de ordem 2 ou 2º termo da sucessão;
- e mais geralmente, ao valor u_p chama-se termo de ordem p ou p-ésimo termo da sucessão.

A expressão u_n chama-se termo geral da sucessão e escreve-se $(u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots, u_n, \ldots)$, ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (u_n) para indicar a sucessão u.
O conjunto $u(\mathbb{N}) = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ designa-se por conjunto dos termos da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplos 3.1. Vejamos alguns exemplos simples de sucessões.

1. Seja $u_n = 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ isto é,

$$(3, 3, 3, 3, 3, 3, \ldots) \tag{3.1}$$

   é a sucessão constante igual a 3.

   Mais geralmente, dado $a \in \mathbb{R}$ e fazendo $u_n = a$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, obtém-se a sucessão constante e igual a a e, neste caso, $u(\mathbb{N}) = \{a\}$.

2. Considere-se a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n$. Está-se perante uma sucessão alternada onde os termos de ordem par são iguais a 1, $u_{2i} = 1$, e os de ordem ímpar iguais a -1, $u_{2i-1} = -1$, qualquer que seja $i \in \mathbb{N}$.

   Neste caso, a sucessão (u_n) pode ser definida por

$$u_n = \begin{cases} 1 \text{ se } \ n \text{ é par} \\ -1 \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases} .$$

   Esta sucessão $(-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots)$ tem como conjunto dos seus termos o conjunto $u(\mathbb{N}) = \{-1, 1\}$.

3. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, $u(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

4. Considere-se a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n}$, para todo o $n \in \mathbb{N}$, isto é $\left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right)$.
   O conjunto dos seus termos é $u(\mathbb{N}) = \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Observação 3.1. Não se pode confundir sucessão com conjunto dos seus termos.
A sucessão $(3, 3, 3, 3, \ldots)$, não é o mesmo que o conjunto $\{3\}$, ou ainda, as sucessões

$$(0, -1, 0, -1, 0, -1, \ldots) \quad \text{e} \quad (0, 0, -1, 0, 0, -1, 0, 0, -1, \ldots)$$

são diferentes, mas o conjunto dos seus termos é o mesmo e igual a $\{-1, 0\}$.

3.1.1 Representação gráfica de uma sucessão

O gráfico de uma sucessão $(u_n)_n$ é o conjunto de pontos do plano definido por

$$\left\{(n, u_n) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\right\},$$

já que se trata de uma função real de variável natural. Por esse facto os pontos que constituem o gráfico são pontos isolados.
Considere-se as sucessões de números reais do tipo:

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & an+b \end{array}$$

com a e b números reais não nulos.
O gráfico é constituído pelo conjunto de pares ordenados do tipo $(n, u_n) = (n, an + b)$, $n \in \mathbb{N}$ que se encontram sobre a reta $y = ax + b$.
Considere-se a reta de equação $y = 3x + 1$ apresentada na Figura 3.1. Os pares ordenados representados são pontos da sucessão de termo geral $u_n = 3n + 1$.

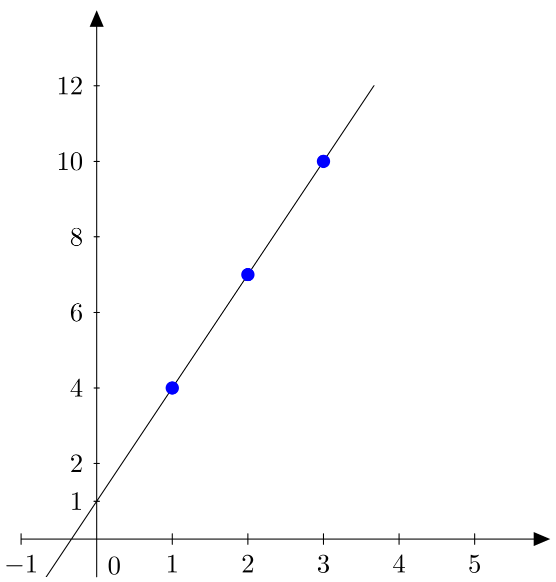

Figura 3.1: $u_n = 3n + 1$

No que se segue apresentam-se questões cujo objetivo é determinar o termo de ordem p de uma sucessão dado o seu termo geral e representar graficamente alguns dos seus termos.

3.1.2 Exercícios

Nesta secção serão apresentados exercícios parametrizados sobre o conceito de sucessão e terminologia utilizada. São exercícios de escolha múltipla em que apenas uma resposta está correta. Ao criar diferentes opções de resposta corre-se o risco de ocorrer opções iguais, mas como as opções de resposta têm que ser todas distintas, esta dificuldade foi por vezes ultrapassada restringindo os valores de alguns parâmetros. As variáveis e parâmetros, na maioria dos exercícios deste trabalho, têm uma estrutura comum, assim a letra n é descrita como a variável do exercício. Os parâmetros a, b e r são números inteiros entre -10 e 10, excluindo-se o 0 e p é um número natural entre 1 e 20.

Sucessão de termo geral $u_n = an + b$

Seja a sucessão de termo geral $u_n = an + b$.
Qual é o termo de ordem p, u_p?
Resolução:
Para obter o termo de ordem p basta substituir na expressão do termo geral n por p, ou seja $u_p = a \times p + b$.
A resposta correta é, portanto $u_p = a \times p + b$. (calculado)
Para seleção das escolhas múltiplas para as hipóteses de resposta ao longo do trabalho, designa-se por correta1 a opção correta e as opções erradas designam-se por errada1, errada2 e errada3. Ao longo do trabbalho usa-se a mesma terminologia.
Escolhas múltiplas:

correta1 $u_p = ap + b$

errada1 $u_p = a(p + b)$

errada2 $u_p = bp + a$

errada3 $u_p = apb$

Todos estes valores são calculados.

Estude-se os casos em que ocorre a igualdade entre correta1, errada1, errada2, errada3 para que possam ser excluídos ou alterados.

correta1 = **errada1** ou seja, $ap + b = a(p + b)$.

Analise-se em que casos ocorre a igualdade:

$$ap + b = ap + ab \Leftrightarrow b - ab = 0 \Leftrightarrow b(1 - a) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee a = 1$$

correta1 = **errada2** ou seja, $ap + b = bp + a$.

$$ap + b = bp + a \Leftrightarrow (a - b)p = a - b \Leftrightarrow (a - b)(p - 1) = 0 \Leftrightarrow a = b \vee p = 1$$

correta1 = **errada3** ou seja, $ap + b = apb$.

$$ap + b = apb \Leftrightarrow ap(1 - b) = -b \Leftrightarrow p = \frac{b}{a(b - 1)},\ a \neq 0 \wedge b \neq 1$$

Esta situação ocorre quando ($a = 1$, $b = 2$ e $p = 2$) ou ($a = 2$, $b = 2$ e $p = 1$). Usou-se a funcionalidade Ibertools para tirar esta conclusão.

Para $a = 0$ vem $b = 0$ e para $b = 1$ vem $ap + 1 = ap$ que é impossível.

Assim, neste caso, a situação de igualdade ocorre quando $a = b = 0$, ($a = 1$, $b = 2$ e $p = 2$) ou ($a = 2$, $b = 2$ e $p = 1$).

errada1 = **errada2** ou seja, $a(p + b) = bp + a$.

$$a(p + b) = bp + a \Leftrightarrow ap + ab = bp + a \Leftrightarrow (a - b)p = a(1 - b) \Leftrightarrow p = \frac{a(1 - b)}{a - b},\ a \neq b.$$

Este é o caso mais complicado, já que existem 122 ternos ordenados, (a, b, p) do conjunto dos parâmetros indicados, que satisfazem a igualdade.

Note-se que para $a = b$ a igualdade $a(p + b) = bp + a$, no domínio dos parâmetros, ocorre quando $a = b = 1$.

errada1 = **errada3** ou seja, $a(p+b) = apb$.

Uma vez que para $b = 1$ a igualdade no domínio dos parâmetros é impossível, vem

$$a(p+b) = apb \Leftrightarrow ap + ab = apb \Leftrightarrow p + b = pb \Leftrightarrow p = \frac{b}{b-1}$$

Esta situação ocorre quando $b = p = 2$.

errada2 = **errada3** ou seja, $bp + a = apb$.

Uma vez que para $a = 1$ a igualdade não se verifica, vem

$$bp + a = apb \Leftrightarrow ap + ab = bp + a \Leftrightarrow bp(1-a) = -a \Leftrightarrow bp = \frac{a}{a-1}$$

Acontece a igualdade quando $a = b = 0$ ou $(a = 2,\ b = 1,\ p = 2)$ ou $(a = 2,\ b = 2,\ p = 1)$.

Na escolha inicial dos parâmetros a e b escolhe-se $a \neq 0$ e $b \neq 0$ de forma a que a sucessão não seja constante.
Exige-se ainda que $a \neq 1$ para que não ocorra correta1=errada1.
Se $a = b$ ocorre correta1=errada2. Para evitar a igualdade, considera-se a seguinte situação:
Se $a = b$ considere-se $errada2 = bp$.
Usando esta escolha se $a = b$ a igualdade com as outras hipóteses de escolha múltipla acontece quando: errada2=errada1 apenas se $ab = 0$, o que não acontece no domínio dos parâmetros escolhido inicialmente e errada2=errada3 apenas se $a = 1$.
Contudo, ficam ainda outras situações por resolver. Não aumentando o grau de dificuldade à questão, foi testado o $p = 21$, não ocorrendo neste caso nenhuma das igualdades atrás analisadas. Assim, impõe-se a restrição seguinte:

Se $a(p+b) = bp + a$ ou $ap(b-1) = b$ ou $b = p = 2$ ou $bp + a = apb$ faça-se $p = 21$.

A escolha dos parâmetros definitiva é:

$$a \in \{-10, -9, \ldots, 9, 10\} \setminus \{0, 1\}, \quad b \in \{-10, -9, \ldots, 9, 10\} \setminus \{0\}, \quad p \in \{2, \ldots, 20\}$$

A programação deste exercício no Megua é a seguinte:

```
%PROBLEM Termo geral de uma sucessão
Considere a sucessão de termo geral $u_n=a3$.
Qual o  termo de ordem $p1$, $u_{p1}$?
%ANSWER
<multiplechoice>
<choice>
$$u_{p1}=b1$$
</choice>
<choice>
$$u_{p1}=errada1$$
</choice>
<choice>
$$u_{p1}=errada2$$
</choice>
<choice>
$$u_{p1}=errada3$$
</choice>
</multiplechoice>

Resolução:
Para obter o termo de ordem $p1$ basta substituir, na expressão do termo
geral, $n$ por $p1$, ou seja,  $u_{p1}=a1 \times p1 sgn1 a22=b1$.

class E97I30_sucessoes_1(Exercise):
def make_random(s)
n=var('n')
s.a1=ur.iunif_nonset(-10,10,[0,1])
s.a2=ur.iunif_nonset(-10,10,[0])
s.p1=ur.iunif(2,20)
s.a3=s.a1*n+s.a2
```

```
if s.a2*s.p1+s.a1==s.a1*s.p1*s.a2:
s.p1=21
if s.a1*(s.p1+s.a2)==s.a2*s.p1+s.a1:
s.p1=21
if s.a1*s.p1*(s.a2-1)==s.a2:
s.p1=21

def solve(s):
s.b1=s.a1*s.p1+s.a2
s.errada1=s.a1*(s.p1+s.a2)
s.errada2=s.a2*s.p1+s.a1
s.errada3=s.a1*s.p1*s.a2
s.a22=abs(s.a2)
if s.a2>0:
s.sgn1=r'+'
else:
s.sgn1=r'-'
''')
```

Apresenta-se agora uma concretização deste exercício. Considere a sucessão de termo geral $u_n = 3\,n - 7$.

Qual o termo de ordem 2, u_2?

Escolha:

$$u_2 = -1$$

Escolha:

$$u_2 = -15$$

Escolha:

$$u_2 = -11$$

Escolha:

$$u_2 = -42$$

Considere-se agora a sucessão de números reais:

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & 3n-7 \end{array}$$

A expressão designatória $3n-7$ é o termo geral da sucessão ou termo gerador pois para cada concretização da variável n no universo $\mathbb{N}$ obtém-se um termo da sucessão, ou seja:
$n=1,\ u_1 = 3\times 1 - 7 = -6, \quad n=2,\ u_2 = 3\times 2 - 7 = -1, \quad n=3,\ u_3 = 3\times 3 - 7 = 2$.
Continuando este processo obtém-se os sucessivos termos da sucessão: $\{-6, -1, 2, 5, ...\}$. Graficamente tem-se (Figura 3.2)

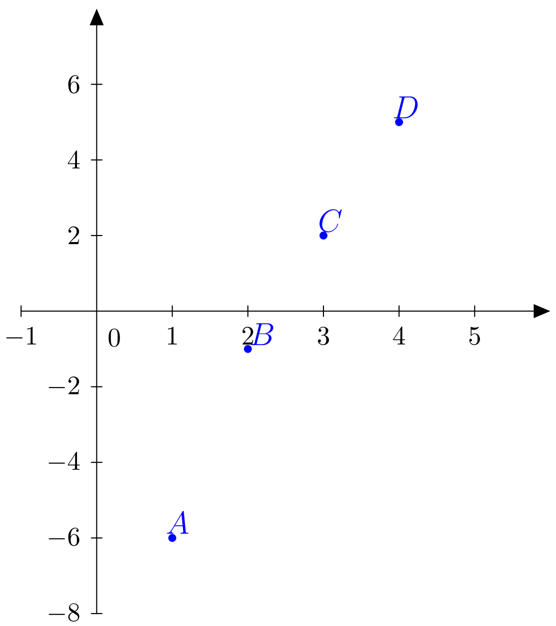

Figura 3.2: $u_n = 3n-7$

Sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n \times \dfrac{a}{n}$

Seja a sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n \times \dfrac{a}{n}$.
Qual é o seu termo de ordem p, u_p?
O domínio inicial dos parâmetros é o mesmo que o definido no exercício anterior.
Resolução:

Para obter o termo de ordem p substitui-se na expressão do termo geral n por p, ou seja $u_p = (-1)^p \times \dfrac{a}{p}$.
A resposta correta é, $u_p = (-1)^p \times \dfrac{a}{p}$.
Para seleção das escolhas múltiplas considere-se as opções de resposta.

Escolhas múltiplas:

correta1 $u_p = (-1)^p \times \frac{a}{p}$

errada1 $u_p = (-1)^{p+1} \times \frac{a}{p}$

errada2 $u_p = (-1)^p \dfrac{a^p}{p}$

errada3 $u_p = \frac{1}{p}$

Repare-se que $(-1)^{p+1}$ e $(-1)^p$ têm sempre sinais contrários, logo, a resposta correta é sempre diferente da resposta errada1, já que $a \neq 0$.
Estude-se os casos em que correta 1, errada1, errada2, errada3 sejam todas diferentes.

correta1 $\neq$ errada2

$$(-1)^p \times \frac{a}{p} \neq (-1)^p \frac{a^p}{p}$$

A igualdade ocorre quando $\dfrac{a}{p} = \dfrac{a^p}{p}$ ou seja quando $a = a^p$ o que só ocorre se $a = 1$ ou $a = 0$. Desde já exclui-se estes valores para o parâmetro a.

correta1 $\neq$ errada3

$$(-1)^p \times \frac{a}{p} \neq \frac{1}{p}$$

Analise-se os casos em que ocorre a igualdade $(-1)^p \times \dfrac{a}{p} = \dfrac{1}{p}$, ou seja, $(-1)^p a = 1$. Basta que $a \neq 1$ para que a igualdade nunca aconteça.

errada1 $\neq$ errada2

$$(-1)^{p+1} \times \frac{a}{p} \neq (-1)^p \frac{a^p}{p}$$

Observe-se que, quando p é ímpar as duas expressões têm sempre sinais contrários. No caso de p ser par a igualdade, no domíno dos parâmetros, ocorre quando $-a = a^p$, donde resulta $a = -1$.

errada1 $\neq$ errada3

$$(-1)^{p+1}\frac{a}{p} \neq \frac{1}{p}$$

Considerando $a \neq 1$ a igualdade nunca ocorre.

errada2 $\neq$ errada3

$$(1)^{p}\frac{a^p}{p} \neq \frac{1}{p}$$

Considerando $a \neq 1$ a igualdade nunca ocorre.

A escolha dos parâmetros,

$$a \in \{-10,\, -9, \ldots, 9,\, 10\} \setminus \{0\,, 1\,, -1\},\; p \in \{1,\, 2, \ldots, 20\},$$

permite que duas escolhas nunca sejam iguais.
Se concretizarmos a variável n no universo $\mathbb{N}$ obtém-se os termos da sucessão e graficamente, na Figura 3.3, verifica-se que para valores de n muito grandes os termos da sucessão aproximam-se de zero.

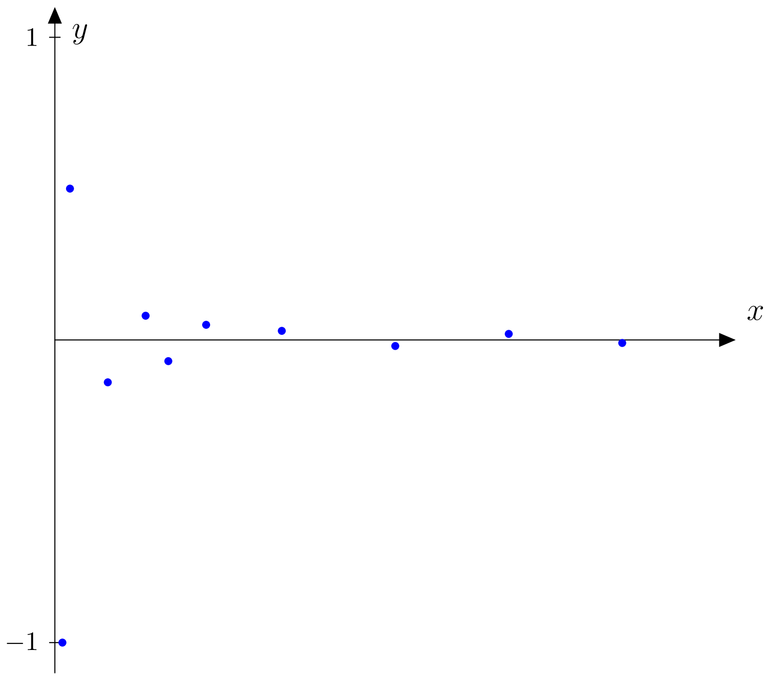

Figura 3.3: $u_n = (-1)^n \times \dfrac{1}{n}$

Sucessão de termo geral $u_n = a^n + b$

Seja agora a sucessão de termo geral $u_n = a^n + b$.

Qual o termo de ordem p?

Resolução:

O termo de ordem p obtém-se substituindo na expressão do termo geral n por p, ou seja, $u_p = a^p + b$.

A resposta correta é, $u_p = a^p + b$.

Para seleção das escolhas múltiplas para as hipóteses de resposta, consideram-se,

Escolhas múltiplas:

correta1 $u_p = a^p + b$

errada1 $u_p = p \times a + b$

errada2 $u_p = -a^p + b$

errada3 $u_p = a + b$

Estude-se os casos em que ocorre a igualdade entre correta1, errada1, errada2, errada3 de forma a que possam ser excluídos ou alterados em caso de igualdade.

correta1 = **errada1** ou seja, $a^p + b = p \times a + b$.

Analise-se em que casos ocorre a igualdade:

$a^p + b = p \times a + b \Leftrightarrow a^p - p \times a = 0 \Leftrightarrow a(a^{p-1} - p) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a^{p-1} = p$.

Como $a \neq 0$, fica apenas $a^{p-1} = p$.

correta1 = **errada2** ou seja, $a^p + b = -a^p + b$.

$a^p + b = -a^p + b \Leftrightarrow 2a^p = 0 \Leftrightarrow a^p = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Esta igualdade não ocorre.

correta1 = **errada3** ou seja, $a^p + b = a + b$.

$a^p + b = a + b \Leftrightarrow a^p - a = 0 \Leftrightarrow a(a^{p-1} - 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a^{p-1} = 1$.

Note-se que $a^{p-1} = 1$ ocorre se $a = 1$ ou se $a = -1$ e p é ímpar.

errada1 = **errada2** ou seja, $p \times a + b = -a^p + b$.

$$p \times a + b = -a^p + b \Leftrightarrow p \times a + a^p = 0 \Leftrightarrow a(p + a^{p-1}) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a^{p-1} = -p.$$

errada1 = **errada3** ou seja, $p \times a + b = a + b$.

$$p \times a + b = a + b \Leftrightarrow p \times a - a = 0 \Leftrightarrow a(p-1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee p = 1.$$

errada2 = **errada3** ou seja, $-a^p + b = a + b$.

$$-a^p + b = a + b \Leftrightarrow -a^p - a = 0 \Leftrightarrow -a(a^{p-1} + 1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee a^{p-1} = -1.$$

Exige-se ainda que $p \neq 1$ para que não ocorra errada1=errada3.

É necessário ainda considerar os casos em que

$$a^{p-1} = \pm p \tag{3.2}$$

e

$$a^{p-1} = \pm 1 \tag{3.3}$$

Para estas escolhas de a e p, (3.2) apenas ocorre se $a = p = 2$. Assim, na programação, impõe-se a restrição se $a = 2 = p$ toma-se $p = 3$.

Para evitar (3.3) excluí-se os valores $a = \pm 1$.

A escolha dos parâmetros definitiva é:

$$a \in \{-10, -9, \ldots, 9, 10\} \setminus \{0, 1, -1\}, \quad b \in \{-10, -9, \ldots, 9, 10\}, \quad p \in \{2, \ldots, 20\}.$$

Para concretização do exercício anterior, onsidere a sucessão de termo geral $u_n = 4^n - 7$.

Qual o termo de ordem 3, u_3?

Escolha:

$$u_3 = 57$$

Escolha:

$$u_3 = 5$$

Escolha:

$$u_3 = 25$$

Escolha:

$$u_3 = -3$$

Resolução:
Para obter o termo de ordem 3 basta substituir, na expressão do termo geral, n por 3, ou seja, $u_3 = 4^3 - 7 = 57$.

3.1.3 Sucessão definida por recorrência

Conhecido o termo geral, isto é, dada a "lei" que permite obter as imagens, uma sucessão fica definida, já que o seu domínio é $\mathbb{N}$.
Uma sucessão pode também ser definida por uma relação de recorrência. Nesta situação não é dada a expressão do termo geral sendo indicado o valor do primeiro termo (ou dos primeiros termos) e o valor de cada termo é definido a partir do anterior (ou de vários termos anteriores).

Definição 3.2. *Uma sucessão diz-se definida por recorrência se é (são) conhecido(s) o(s) primeiro(s) termo(s) e a "lei" para determinar qualquer outro termo, recorrendo a termo(s) anteriores.*

Considere-se (t_n) a sucessão dos números triangulares em que os primeiros cinco termos são, $1, 3, 6, 10, 15$, ou seja :
$t_1 = 1, \quad t_2 = 1 + 2 = t_1 + 2, \quad t_3 = 3 + 3 = t_2 + 3, \quad t_4 = 6 + 4 = t_3 + 4, \ldots, t_n = t_{n-1} + n.$
A sucessão (t_n) pode ser definida por recorrência de seguinte forma

$$\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + n, \quad n \geq 2 \end{cases}.$$

Dois casos particulares de sucessões, dos quais se irá falar mais à frente neste trabalho, que podem ser definidas por recorrência são a progressão aritmética de razão r e primeiro termo a, definida por

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n + r, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

e a progressão geométrica de razão r e primeiro termo a, definida por

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = u_n \times r, \quad n \geq 1 \end{cases}.$$

Fibonacci (1175-1260) deu um grande contributo nesta área da matemática. A sucessão de Fibinacci, ou sequência de Fibonacci é uma sequência de números inteiros, na qual os primeiros dois termos são 0 e 1, e cada termo seguinte corresponde à soma dos dois termos anteriores. Os números de Fibinacci são , portanto, os números que compõem a seguinte sequência de números inteiros

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181\ldots$$

Em termos matemáticos esta sucessão é definida recursivamente pela fórmula abaixo,

$$\begin{cases} F_0 = 0\,, F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{cases}.$$

3.2 O método de indução matemática

Considere-se a sucessão (u_n) definida por recorrência do seguinte modo:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = u_n^2, \quad n \geq 1 \end{cases}. \tag{3.4}$$

Pretende-se provar que qualquer termo desta sucessão está entre 0 e 1, isto é, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

Intuitivamente, uma vez que o 1º termo é $\dfrac{1}{4}$ (que é positivo e menor do que 1), o segundo termo é o quadrado deste (e consequentemente também é positivo e menor do que 1) a afirmação parece verdadeira.

O método de indução matemática ou também designado por método de indução finita, que se apresenta em seguida, é o método ideal para provar esta afirmação. Como se perceberá facilmente, é especialmente indicado para provar propriedades das sucessões definidas por recorrência.

Teorema 3.1. *Princípio de indução matemática:*
Seja $P(n)$ uma condição na variável natural n tal que:

(i) $P(1)$ *é verdadeira*

(ii) $\forall k \in \mathbb{N},\ P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Então $P(n)$ é verdadeira, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Defina-se $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ é verdadeira}\}$. Pretende-se provar que $A = \mathbb{N}$. Uma vez que da definição vem $A \subset \mathbb{N}$, basta provar que $\mathbb{N} \subset A$.
Suponhamos que esta inclusão não se verifica, ou seja que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que m não pertence a A. Designe-se por m_0 o menor número natural que satisfaz essa condição, ou seja, $m_0 \in \mathbb{N}$ e $m_0 \notin A$. Como $1 \in A$ vem $m_0 > 1$, $m_0 - 1 \in \mathbb{N}$ e $m_0 - 1 \in A$. Como por hipótese, se $k \in A$ então $k + 1 \in A$, conclui-se que $m_0 \in A$ o que contradiz a definição de m_0. Assim $\mathbb{N} \subset A$ e consequentemente $A = \mathbb{N}$.
Desta forma a proposição $P(n)$ é verdadeira para todo o $n \in \mathbb{N}$. $\square$

O principio de indução matemática aplica-se do seguinte modo:

- Prova-se que $P(1)$ é verdadeira;

- Para $k \in \mathbb{N}$, assume-se como hipótese que $P(k)$ é verdadeira (é a chamada hipótese de indução) e prova-se que $P(k+1)$ é verdadeira (é a chamada tese de indução) e assim conclui-se, pelo princípio de indução finita, que $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Nota 3.1. Não é obrigatório para o método de indução matemática começar com $n = 1$. Se na primeira fase se começar, por exemplo, com um número natural ou nulo m, demonstra-se que a propriedade é válida para os números naturais maiores ou iguais a m.

Exemplo 3.1. Mostre-se que $0 < u_n < 1$, sendo $(u_n)_n$ a sucessão dedinida em (3.4).
Neste caso a condição $P(n)$ é: $0 < u_n < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$

- $P(1)$ é verdadeira, pois $u_1 = \dfrac{1}{4}$ e $0 < \dfrac{1}{4} < 1$, consequentemente $0 < u_1 < 1$.

- Suponha-se que $0 < u_k < 1$ com vista a provar que $0 < u_{k+1} < 1$.

Tem-se por definição, que: $u_{k+1} = u_k^2$, e, como $0 < u_k < 1$, multiplicando os membros por u_n vem, $0 < u_k^2 < u_k$, ou seja

$$0 < u_{k+1} < u_k.$$

Como por hipótese $0 < u_n < 1$, vem $0 < u_{n+1} < 1$.

Assim, pelo princípio de indução matemática conclui-se que,

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, 0 < u_n < 1.$$

Blaise Pascal(1623-1662) matemático e físico francês, utilizou o princípio de indução matemática para demonstrar, com clareza, algumas propriedades e regularidades numéricas. Um dos fascínios da Matemática é, sem dúvida, a particularidade de relacionar ideias que, à primeira vista parecem completamente independentes. É exatamente o que se passa com o triângulo de Pascal, com a sucessão de Fibonacci e com a fórmula binomial de Newton. Analise-se as imagens que se seguem, Figura 3.4, para que se compreenda inequivocamente a sua interligação [7].

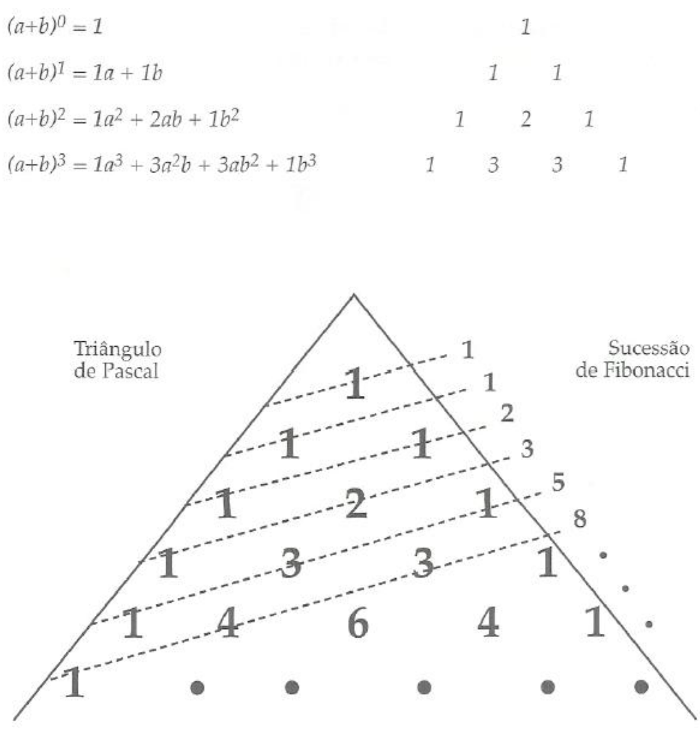

Figura 3.4: Triângulo de Pascal

No triângulo de Pascal, temos como resultado da soma das diagonais, a sequência de Fibonacci.

Exemplos 3.2. 1. No triângulo de Pascal a soma de dois elementos consecutivos de uma linha é igual ao elemento que se encontra entre os dois na linha seguinte, isto é, $C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n,\ n,\ k \in \mathbb{N}$, com $n \geq k$.

Uma vez que

$$\begin{aligned} C_k^n + C_{k-1}^n &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_k^{n+1}, \end{aligned}$$

vem $C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n,\ n,\ k \in \mathbb{N}$, com $n \geq k$.

No que se segue usa-se o de indução matemática para provar mais uma das propriedades do triângulo de Pascal. Assim:

2. A soma de todos os termos de uma linha do triângulo de Pascal é 2^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

$$C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}_0.$$

Para $n = 0$ vem que:

$$C_0^0 = 2^0 \Leftrightarrow 1 = 1,$$

o que prova que $P(0)$ é uma proposição verdadeira

Hipótese: $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n$.

Tese: $C_0^{n+1} + C_1^{n+1} + C_2^{n+1} + \ldots + C_n^n + C_{n+1}^n = 2^{n+1}$.

Pela propriedade anterior tem-se que:

$$C_1^{n+1} = C_0^n + C_1^n$$

$$C_2^{n+1} = C_1^n + C_2^n$$

$$\ldots$$

$$C_n^{n+1} = C_{n-1}^n + C_n^n.$$

Assim e olhando a hipótese de indução

$$\begin{aligned} C_0^{n+1} + C_1^{n+1} + C_2^{n+1} + \ldots + C_n^{n+1} + C_{n+1}^{n+1} &= C_0^n + C_0^n + C_1^n + C_1^n + \ldots + C_{n-1}^n + C_n^n + C_n^n \\ &= 2C_0^n + 2C_1^n + \ldots + 2C_n^n \\ &= 2\left(C_0^n + C_1^n + \ldots + C_n^n\right) \\ &= 2 \times 2^n \\ &= 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Fica assim provada a propriedade, aplicando o método de indução matemática.

Exemplo 3.2. Considere-se a seguinte sucessão definida por recorrência:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Pretende-se provar, por indução, que $0 < u_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Neste caso a condição $P(n)$ é: $0 < u_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

- $P(1)$ é verdadeira, pois $u_1 = \dfrac{1}{2}$ e $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, consequentemente $0 < u_1 < 1$.
- Suponha-se que $0 < u_n < 1$ com vista a provar que $0 < u_{n+1} < 1$.

  Tem-se, por definição, que: $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, e, como $0 < u_n < 1$, multiplicando ambos os membros de $u_n < 1$ por u_n vem $u_n^2 < u_n$, onde se conclui que

$$0 < u_n - u_n^2. \tag{3.5}$$

  Por outro lado, como $u_n^2 \geq 0$, vem $u_n - u_n^2 \leq u_n$ e como $u_n < 1$ vem

$$u_n - u_n^2 \leq u_n < 1. \tag{3.6}$$

Como $u_{n+1} = u_n - u_n^2$, de (3.5) e (3.6), resulta $0 < u_{n+1} < 1$.

Pelo principio de indução matemática conclui-se que,

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, 0 < u_n < 1$$

.

3.3 Sucessões monótonas

3.3.1 Definição e exemplos

Definição 3.3. *Seja (u_n) uma sucessão de números reais.*

i. *A sucessão (u_n) diz-se crescente (em sentido lato) se $u_{n+1} \geq u_n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.*

ii. *Dir-se-á que a sucessão é estritamente crescente se $u_{n+1} > u_n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, ou seja $u_{n+1} - u_n > 0$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.*

iii. *A sucessão (u_n) diz-se decrescente (em sentido lato) se $u_{n+1} \leq u_n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.*

iv. *Dir-se-á que a sucessão é estritamente decrescente se $u_{n+1} < u_n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$,ou seja, $u_{n+1} - u_n < 0$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.*

v. *A sucessão (u_n) diz-se constante se $u_{n+1} = u_n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $u_{n+1} - u_n = 0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.*

vi. *A sucessão (u_n) diz-se monótona em sentido lato se for crescente ou decrescente em sentido lato e estritamente monótona se for estritamente crescente ou estritamente decrescente.*

Exemplos 3.3.

1. Considere-se a sucessão de termo geral $u_n = (n - 10)^2$.

   Para estudar a monotonia da sucessão terá que se resolver uma das inequações

   $u_n < u_{n+1}$ ou $u_n > u_{n+1}$ e, conforme for o seu conjunto-solução, concluir sobre a monotonia da sucessão.

Mas estudar o sinal das desigualdades $u_n < u_{n+1}$ ou $u_n > u_{n+1}$ é estudar o sinal da diferença $u_{n+1} - u_n$.

Estude-se então o sinal da diferença $u_{n+1} - u_n$.

Assim $u_{n+1} - u_n = (n+1-10)^2 - (n-10)^2 = (n-9)^2 - (n-10)^2 = 2n - 194$ e como $2n - 19 < 0$ para $n < 9,5$, conclui-se que para $n \leq 9, \quad u_{n+1} - u_n < 0$ e para $n \geq 10, \quad u_{n+1} - u_n > 0$, o que permite concluir que a sucessão não é monótona.

2. Considere-se a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

   Esta sucessão é estritamente decrescente, uma vez que o numerador é constane e igual a 1 e o denominador é positivo e crescente. De facto, $(n+1)^2 + (n+1) > n^2 + n$, pelo que $\sqrt{(n+1)^2 + (n+1)} > \sqrt{n^2+n}$, donde (sendo números positivos) se conclui que $\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}} < \dfrac{1}{n^2+n}$. Portanto, $u_{n+1} < u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, pelo que (u_n) é estritamente decrescente.

3. Considere-se a sucessão de termo geral $u_n = \sqrt{n^2 - n}$. Intuitivamente deve ser claro que esta sucessão é crescente, pois no seu termo geral a parcela n^2 cresce mais rapidamente que a parcela n e a raíz quadrada é uma função crescente.

   Comece-se por fazer o estudo da diferença $u_{n+1} - u_n$.

   Assim,

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sqrt{(n+1)^2 - (n+1)} - \sqrt{n^2 - n} \\
&= \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} \\
&= \frac{(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n})}{(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n})} \\
&= \frac{2n}{(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

   o que permite concluir que a sucessão é monótona crescente.

3.3.2 Exercícios

Com os exercícios seguintes o conceito a explorar é monotonia de uma sucessão.

Sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{an - b}{cn + d}$

Neste exercício pretende-se estudar a monotonia de uma sucessão de termo geral u_n.

O domínio inicial dos parâmetros a, b, c e d é o conjunto dos números inteiros tais que

$$-10 \leq a,\, b \leq 10, \text{ e } 1 \leq c,\, d \leq 20.$$

Resolução: Para estudar a monotonia da sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{an - b}{cn + d}$, comece-se por estudar o sinal da diferença $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{a(n+1) - b}{c(n+1) + d} - \frac{an - b}{cn + d}.$$

Simplificando a expressão aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição,

$$\frac{an + a - b}{cn + c + d} - \frac{an - b}{cn + d}$$

reduzindo as duas frações ao mesmo denominador,

$$\frac{(an + a - b)(cn + d) - (an - b)(cn + c + d)}{(cn + c + d)(cn + d)}$$

simplificando esta expressão obtém-se,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{ad + bc}{(cn + c + d)(cn + d)}.$$

A monotonia da sucessão depende do valor da expressão $ad + bc$, uma vez que $(cn + c + d)(cn + d)$ é sempre positivo, visto que n é um número natural e c e d são números inteiros positivos.

Assim sendo, surgem três situações:

- $ad + bc > 0$, e neste caso, para qualquer número natural n, $u_{n+1} - u_n > 0$ e a sucessão é estritamente crescente.

Para seleção das escolhas múltiplas para as hipóteses de resposta tem-se,

correta1 A sucessão é estritamente crescente.

errada1 A sucessão é estritamente decrescente.

errada2 A sucessão é constante.

errada3 A sucessão não é monótona.

- $ad + bc < 0$, e neste caso, para qualquer número natural n a sucessão é estritamente decrescente.

Para seleção das escolhas múltiplas para as hipóteses de resposta considere-se as seguintes opções de resposta,

correta1 A sucessão é estritamente decrescente.

errada1 A sucessão é estritamente crescente.

errada2 A sucessão é constante.

errada3 A sucessão não é monótona.

- $ad + bc = 0$ a sucessão é constante.

Para seleção das escolhas múltiplas para resposta ao exercício tem-se as opções,

correta1 A sucessão é constante.

errada1 A sucessão é estritamente crescente.

errada2 A sucessão é estritamente decrescente.

errada3 A sucessão não é monótona.

Concretizando, considerem-se as sucessões de termos gerais

$$u_n = \frac{2n-1}{n+1},\ v_n = \frac{4n+3}{2n+1},\ t_n = \frac{-2n-4}{3n+6}.$$

Na sucessão de termo geral u_n, $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$ e $ad + bc = 2 \times 1 + 1 \times 1 = 3$, donde se conclui que a sucessão u_n é estritamente crescente.

Para a sucessão de termos geral v_n vem $a = 4$, $b = -3$, $c = 2$ e $d = 1$, donde resulta $ad + bc = 4 \times 1 + (-3) \times 2 = 4 - 6 = -2$, o que permite conclui que a sucessão de termo geral v_n é estritamente decrescente.

No caso da sucessão (t_n) vem $a = -2$, $b = 4$, $c = 3$, $d = 6$ e $ad + bc = -12 + 12 = 0$, o que permite concluir que a sucessão de termo geral t_n é constante.

Sucessão de termo geral $u_n = an^2 - bn$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = an^2 - bn$, com $a, b \in \{1, \ldots, 20\}$.

Resolução: Para estudar a monotonia da sucessão de termo geral $u_n = an^2 - bn$, considere-se $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= a(n+1)^2 - b(n+1) - (an^2 - bn) \\ &= a(n^2 + 2n + 1) - b(n+1) - an^2 + bn \\ &= an^2 + 2an + a - bn - b - an^2 + bn \\ &= 2an + a - b \\ &= a(2n+1) - b \end{aligned}$$

Como a e b são positivos, $u_{n+1} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\frac{b}{a} - 1}{2} = \dfrac{b-a}{2a}$.

Assim, se $\left[\dfrac{b-a}{2a}\right] \leq 1$, a sucessão é monótona crescente. Caso contrário a sucessão não é monótona, já que $u_{n+1} - u_n < 0$ se $n \leq \left[\dfrac{b-a}{2a}\right]$ e $u_{n+1} - u_n \geq 0$ caso contrário.

Considere-se a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = n^2 - 6n$. Neste caso $a = 1$ e $b = 6$ o valor de $\dfrac{b-a}{2a} = \dfrac{6-1}{2 \times 1} = 2,5$.

se $n > 2$ vem que $u_{n+1} - u_n > 0$

se $n \in \{1, 2\}$ $u_{n+1} - u_n < 0$.

Como a diferença $u_{n+1} - u_n$ não toma sempre o mesmo sinal para todo o número natural n, conclui-se que a sucessão não é monótona.

Observação 3.2. Uma representação gráfica de (u_n), Figura 3.5 atendendo a que é uma restrição a $\mathbb{N}$ da função definida por $f(x) = x^2 - 6x$, permite conjeturar que a sucessão é não monótona. O estudo da monotonia de funções pode ser aplicado ao estudo da monotonia de sucessões. Se a função f é monótona então a sucessão $(f(n))$ também é monótona [17].

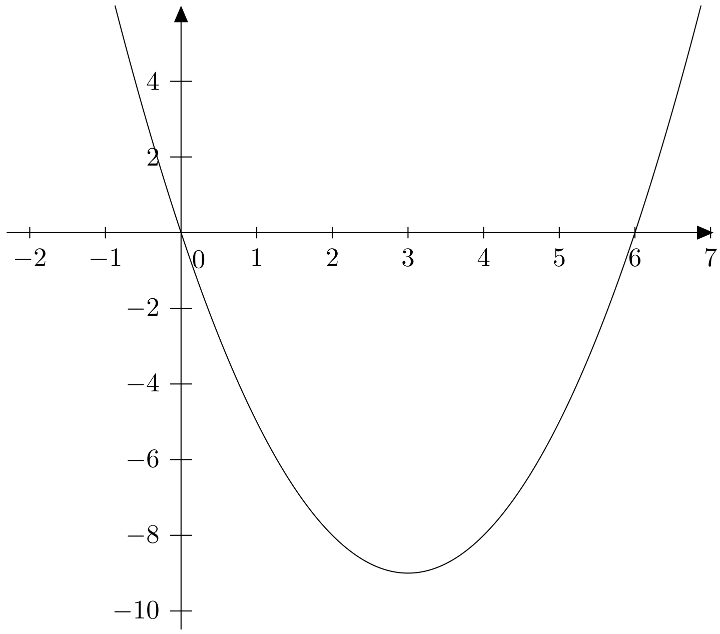

Figura 3.5: $f(x) = x^2 - 6x$

3.4 Sucessões limitadas

3.4.1 Noção de conjunto limitado

Para definir sucessão limitada referem-se em primeiro alguns conceitos que ajudam na compreensão do tema em questão.

Definição 3.4. *Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$.*

i. Diz-se que um número real M é majorante de A se $M \geq x$, $\forall x \in A$.

ii. Diz-se que um número real m é minorante de A se $m \leq x$, $\forall x \in A$.

iii. O conjunto A dir-se-á limitado superiormente se tiver pelo menos um majorante, e dir-se-á limitado inferiormente se tiver pelo menos um minorante. Se o conjunto A for limitado superior e inferiormente, então dir-se-á, simplesmente, que A é limitado.

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente. Chama-se supremo de A, e denota-se por $\sup(A)$, ao menor dos majorantes de A.

Se $\sup(A) \in A$ então assume a designação de máximo de A, $\max(A) = \sup(A)$, e se $\sup(A) \notin A$, então o $\max(A)$ não existe.

Seja agora A um subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente. Chama-se ínfimo de A, e denota-se por $\inf(A)$, ao maior dos minorantess de A.

Se $\inf(A) \in A$ então assume a designação de mimímo de A, $\inf(A) = \min(A)$, e se $\inf(A) \notin A$, então o $\min(A)$ não existe.

Uma sucessão (u_n) diz-se minorada se o conjunto dos seus termos o for, isto é, se e só se existe um número real m tal que $u_n \geq m$, para todo o número natural n. Uma sucessão (u_n) diz-se majorada se o conjunto dos seus termos o for, isto é, se e só se existe um número real M tal que $u_n \leq M$, para todo o número natural n.

Definição 3.5. *Uma sucessão (u_n) diz-se limitada se o conjunto dos seus termos é majorado e minorado, ou seja: (u_n) é limitada se e só se*

$$\exists\, m, M \in \mathbb{R} : m \leq a_n \leq M,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pode definir-se sucessão limitada usando o valor absoluto dos seus termos. A sucessão (u_n) diz-se limitada se

$$\exists\, L > 0 :\ |u_n| \leq L,\ \forall\, n\ \in\ \mathbb{N}.$$

Da Definição 3.5, conclui-se que uma sucessão é limitada quando é limitada inferiormente e superiormente.

A sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ é limitada. Concretizando a variável n no universo dos números naturais obtém-se $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dots\right)$.

Graficamente, Figura 3.6, conclui-se que todos os termos desta sucessão são superiores ou iguais a $\dfrac{1}{2}$ e todos os termos são inferiores a 1, ou seja,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1} < 1,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

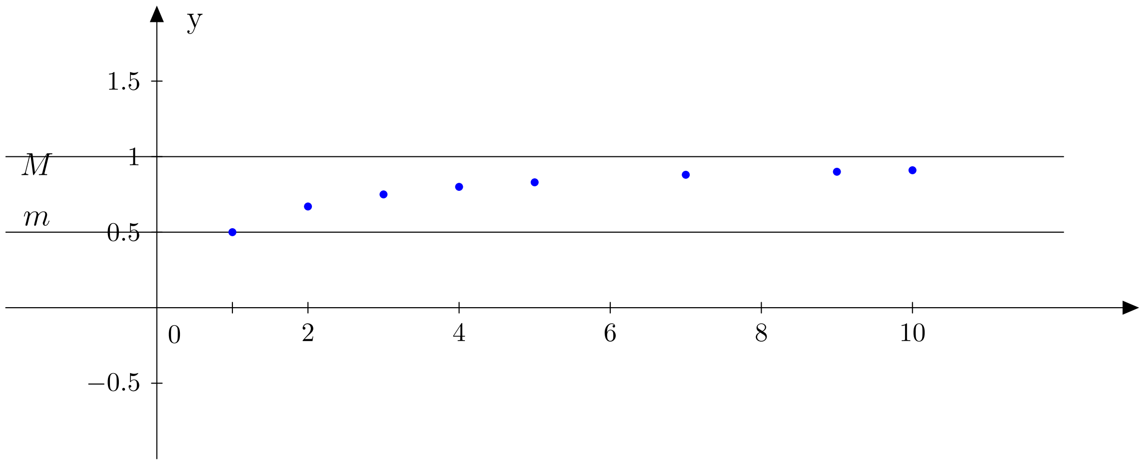

Figura 3.6: $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

De facto, como $n < n+1$, resulta que $\dfrac{n}{n+1} < 1$ para todo o número natural n e uma vez que $n+1 \leq 2n$ vem $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{n}{n+1}$.
Assim $\dfrac{1}{2} \leq u_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$ o que permite concluir que a sucessão é minorada e majorada, logo é limitada.

Proposição 3.1. *Seja (u_n) uma sucessão de números reais.*

- *Se a sucessão (u_n) é estritamente crescente então o primeiro termo é um minorante do conjunto dos termos da sucessão, ou seja $u_1 \leq u_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.*
- *Se a sucessão (u_n) é estritamente decrescente então o primeiro termo é um majorante do conjunto dos termos da sucessão, ou seja $u_n \leq u_1\ \forall n \in \mathbb{N}$.*

3.4.2 Exercícios

Com os exercícios que se seguem pretende-se estudar o conceito de sucessão limitada.

Exercício 1: Considere-se a sucessão de termo geral $u_n = a + (-1)^n$ com a um número inteiro compreendido entre -10 e 10.

Esta sucessão pode ser definida por

$$u_n = \begin{cases} a+1 \text{ se } n \text{ é par} \\ a-1 \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

A sucessão (u_n) é limitada pois, $a-1 \leq u_n \leq a+1$ para qualquer número natural n.
Para seleção das escolhas múltiplas para as hipóteses de resposta, considerem-se,
Escolhas múltiplas:

correta1 A sucessão é limitada, pois $a-1 \leq u_n \leq a+1$.

errada1 A sucessão é limitada, pois $u_n \leq a+1$.

errada2 A sucessão é limitada, pois $u_n \geq a-1$

errada3 A sucessão não é limitada.

Concretizando, considere-se a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = 2 + (-1)^n$. Neste caso $a = 2$, $a-1 = 2-1 = 1$ e $a+1 = 2+1 = 3$, logo $1 \leq u_n \leq 3$ para qualquer número natural n. Assim a sucessão é limitada pois é majorada e minorada.

Observação 3.3. Do mesmo modo se mostra que a sucessão (u_n) com $u_n = a \times (-1)^n$ é limitada.

Exercício 2: Considere-se a sucessão de termo geral $u_n = an + b$, com a e b números inteiros entre -10 e 10 .
Surgem quatro situações:

- $a = 0$ e $b = 0$, neste caso $u_n = 0$, sucessão de termos nulos.

- $a = 0$ e $b \neq 0$, neste caso $u_n = b$, sucessão constante.

- $a \neq 0$ neste caso $u_1 = a+b$; $u_2 = 2a+b$; $u_3 = 3a+b; \ldots$, neste caso a sucessão $u_n = an+b$ não é limitada.

  Suponha-se que a sucessão de termo geral $u_n = an + b$ é limitada. Nestas condições existem m e M números reais tais que:

  $$m \leq u_n \leq M. \tag{3.7}$$

  Seja $p = \max\left\{\dfrac{M-b}{a}, \dfrac{m-b}{a}\right\}$, bastaria tomar $n > p$ para que (3.7) não se verificasse.
  Assim conclui-se que que a sucessão de termo geral $u_n = an + b$ não é limitada.

Considere-se $a > 0$. Neste caso a sucessão não é limitada superiormente, mas é minorada pelo seu 1º termo.

No caso em que $a < 0$ a sucessão não é limitada inferiormente, mas é majorada pelo seu 1º termo.

Para seleção das escolhas múltiplas para as hipóteses de resposta, considera-se, no caso em que $a > 0$

correta1 A sucessão não é limitada, pois é minorada mas não é majorada.

e, no caso em que $a < 0$,

correta1 A sucessão não é limitada, pois é majorada mas não é minorada.

Para as restantes escolhas múltiplas as opções de resposta são:

errada1 A sucessão é limitada, pois é minorada.

errada2 A sucessão é limitada, pois é majorada.

errada3 A sucessão é limitada, pois é a sucessão constante.

Exercício 3: Seja agora $u_n = \dfrac{an+b}{cn}$, com a, b e c números reais positivos não nulos. Pretende-se verificar se a sucessão (u_n) é ou não limitada.

Note-se que $\dfrac{an+b}{cn}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{cn}$.

Como $0 < \dfrac{1}{n} \leq 1$ multiplicando os membros da desigualdade por b, como $b > 0$ a desigualdade não se altera, obtém-se $0 < \dfrac{b}{n} \leq b$ e, dividindo os membros da desigualdade por c, como $c > 0$ a desigualdade não se altera, $0 < \dfrac{b}{cn} \leq \dfrac{b}{c}$. Assim, somando $\dfrac{a}{c}$ tem-se

$$\frac{a}{c} < \frac{a}{c} + \frac{b}{cn} \leq \frac{a}{c} + \frac{b}{c},$$

ou

$$\frac{a}{c} < \frac{a}{c} + \frac{b}{cn} \leq \frac{a+b}{c},$$

donde se conclui que

$$\frac{a}{c} < u_n \leq \frac{a+b}{c},$$

e portanto a sucessão é limitada com $m = \frac{a}{c}$ e $M = \frac{a+b}{c}$
Considerem-se as seguintes opções de resposta,

Escolhas múltiplas:

correta1 A sucessão é limitada; um dos minorantes é $\frac{a}{c}$ e um dos majorantes é $\frac{a+b}{c}$.

errada1 A sucessão é limitada superiormente mas não tem minorantes.

errada2 A sucessão é limitada inferiormente mas não tem majorantes.

errada3 A sucessão não é limitada, pois não tem majorantes nem minorantes.

3.5 Progressão Aritmética

As progressões aritméticas constituem um tipo especial de sucessões definidas por recorrência, em que cada termo se obtém do anterior por adição de uma parcela constante. A progressão aritmética (p.a.) é um tipo de sucessão muito usada em situações do dia a dia.

3.5.1 Definição e exemplos

Definição 3.6. *Uma sucessão* (u_n) *é progressão aritmética se e só se existe um número real* r*, tal que* $u_{n+1} = u_n + r$ *para todo o número natural* $n \geq 2$*, isto é, cada termo da sucessão obtém-se do anterior adicionando-lhe uma constante* r *a que se chama razão da progressão aritmética.*

Da Definição 3.6. decorre imediatamente que $u_{n+1} - u_n = r\,, \forall n \in \mathbb{N}$.
Assim reconhece-se que uma sucessão é uma progressão aritmética se a diferença entre cada termo e o seu anterior for constante, isto é, não depende de n.
A razão r da progressão aritmética permite afirmar o seguinte relativamente à monotonia:

- Se $r > 0$, a progressão aritmética é monótona crescente.
- Se $r < 0$, a progressão aritmética é monótona decrescente.
- Se $r = 0$, a progressão aritmética é constante.

Exemplos 3.4.

1. $(2, 5, 8, 11, 14, \ldots)$ é uma progressão aritmética crescente de razão 3.

2. $(20, 18, 16, 14, 12, \ldots)$ é uma progressão aritmética decrescente de razão -2.

3. $(1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$ é uma progressão aritmética constante onde a razão é nula. (Estes casos não são usualmente incluídos nas progressões aritméticas por se tratar da sucessão constante.)

Proposição 3.2. *O termo geral de uma progressão aritmética de razão r e primeiro termo u_1 é dado por $u_n = u_1 + r(n-1)$.*

Demonstração. Para provar que $u_n = u_1 + r(n-1)$ usa-se o principio de indução matemática. Assim,

$P(1)$ é verdadeira, pois $u_1 = u_1 + r(1-1) = u_1$

Supondo que $P(n)$ é verdadeira pretende-se provar que $P(n+1)$ é verdadeira.

Hipótese: $u_n = u_1 + r(n-1)$

Tese: $u_{n+1} = u_1 + rn$

Por definição de progressão aritmética, vem $u_{n+1} = u_n + r$

e, como por hipótese

$$u_n = u_1 + r(n-1),$$

vem

$$u_{n+1} = u_1 + r(n-1) + r,$$

ou

$$u_{n+1} = u_1 + rn - r + r,$$

donde resulta

$$u_{n+1} = u_1 + rn,$$

o que prova que a relação é válida para $n+1$.

Fica assim demonstrado, pelo principio de indução matemática, que o termo geral de uma progressão aritmética é dado por $u_n = u_1 + r(n-1)$. $\square$

3.5.2 Exercícios

Determinar a razão de uma progressão aritmética sabendo dois dos seus termos, não sendo eles termos consecutivos.

Considere-se $u_k = a$ e $u_p = b$ com

$$a,\, b \in \mathbb{Z},\, -10 \leq a,\, b \leq 10,\, m \in \{2, \ldots, 20\}\,, p\,, k \in \{1, \ldots, 20\}.$$

Resolução:

Se $p = k + m$, por definição vem que $u_p = u_k + mr$.

Como $u_k = a$ e $u_p = b$ resulta $b = a + mr$, donde se tira que $r = \dfrac{b-a}{m}$, ou seja a razão da progressão é $r = \dfrac{b-a}{m}$.

Assim, a resposta correta é, $r = \dfrac{b-a}{m}$.

Considerem-se as seguintes opções de reposta:

Escolhas múltiplas:

correta1 $r = \dfrac{b-a}{m}$

errada1 $r = \dfrac{a-b}{m}$

errada2 $r = \dfrac{b}{m}$

errada3 $r = \dfrac{a}{m}$

Uma vez que não podem existir duas respostas iguais, surge a necessidade de garantir que todas as escolhas são distintas.

Estude-se os casos em que:

correta1 = **errada1** ou seja, $\dfrac{b-a}{m} = \dfrac{a-b}{m}$.

A igualdade ocorre quando:

$$\frac{b-a}{m} = \frac{a-b}{m} \Leftrightarrow b - a = a - b \Leftrightarrow a = b.$$

correta1 $=$ **errada2** ou seja, $\dfrac{b-a}{m} = \dfrac{b}{m}$.

$$\frac{b-a}{m} = \frac{b}{m} \Leftrightarrow b-a=b \Leftrightarrow a=0.$$

correta1 $=$ **errada3** ou seja, $\dfrac{b-a}{m} = \dfrac{a}{m}$.

$$\frac{b-a}{m} = \frac{a}{m} \Leftrightarrow b-a=a \Leftrightarrow b=2a.$$

errada1 $=$ **errada2** ou seja, $\dfrac{a-b}{m} = \dfrac{b}{m}$.

$$a-b=b \Leftrightarrow a=2b.$$

errada1 $=$ **errada3** ou seja, $\dfrac{a-b}{m} = \dfrac{a}{m}$.

$$\frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} \Leftrightarrow a-b=a \Leftrightarrow b=0.$$

errada2 $=$ **errada3** ou seja, $\dfrac{b}{m} = \dfrac{a}{m}$.

$$\frac{b}{m} = \frac{a}{m} \Leftrightarrow b=a.$$

Para não se obter a razão constante igual a 0 e para evitar as situações correta1=errada2 e errada1=errada3, exige-se a e b não nulos.

Exige-se ainda que $b \neq a$ para que não ocorra correta1=errada1 e errada2=errada3; $a \neq 2b$ para que não ocorra errada1=errada2 e $b \neq 2a$ para que não ocorra correta1 $=$ errada 3.

Uma solução para os casos descritos anteriormente, impondo $a \neq 0\,, b \neq 0$, em que ocorre igualdade pode ser,

- Se $a=b$, considere-se errrada1=$\dfrac{b}{m}$; errada2=$\dfrac{b}{2m}$; errada3=$\dfrac{2b}{m}$.
- Se $a=2b$, errada1=$\dfrac{b}{m}$; errada2=$\dfrac{b}{2m}$; errada3=$\dfrac{2b}{m}$.

- Se $b = 2a$, errada1=$\dfrac{-a}{m}$; errada2=$\dfrac{2a}{m}$; errada3=$\dfrac{a}{2m}$

A escolha dos parâmetros definitiva é:

$$a\,,b\,\in\,\{-10,\ldots,10\}\setminus\{0\}\quad;m\,\in\,\{2,\ldots,20\}\,;p\,,k\,\in\,\{1,\ldots,20\}.$$

Concretizando:

Determinar a razão de uma progressão aritmética sabendo que $a_5 = -5$ e $a_8 = 10$.

Neste caso tem-se que $a_8 = a_5 + 3r \Leftrightarrow 10 = -5 + 3r \Leftrightarrow 3r = 15 \Leftrightarrow r = \dfrac{15}{3} = 5$.

3.5.3 Soma dos termos de uma progressão aritmética

Para obtenção da soma dos n termos de uma progressão aritmética, observe-se o seguinte racíocinio:

$$u_1 + u_n$$

$$u_2 + u_{n-1} = u_1 + r + u_1 + (n-2)r = 2u_1 + (n-1)r = u_1 + u_n$$

$$u_3 + u_{n-2} = u_1 + 2r + u_1 + (n-3)r = 2u_1 + (n-1)r = u_1 + u_n$$

e assim sucessivamente.

Desta forma, agrupando os termos aos pares, tem-se que:

- Se n é par, existem $\dfrac{n}{2}$ pares cuja soma é sempre igual a $u_1 + u_n$, ou seja $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = (u_1 + u_n)\dfrac{n}{2} = \dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$.

- Se n é ímpar, $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, tem-se neste caso um termo central (ou termo mediano) que não agrupa com qualquer outro termo. Agrupando-se todos os termos não contando com esse termo mediano, tem-se $n-1$ termos que se podem agrupar aos pares. Portanto ter-se-á $\dfrac{n-1}{2}$ pares cuja soma é sempre igual a $u_1 + u_n$.
  A soma de todos esses termos é , portanto, igual a $\dfrac{n-1}{2} \times (u_1 + u_n)$ ou seja é igual a $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times (n-1)$.
  Adicionando o termo mediano, designe-se esse termo por u_k. Tente-se exprimir u_k em

função de u_1 e de u_n. Seja u_{k-1} o termo anterior ao termo mediano e seja u_{k+1} o termo seguinte ao termo mediano.

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_{k-1}) + u_k + (u_{k+1} + u_{k+2} + \ldots + u_n)$$

Uma vez que $n = 2k-1$ vem $u_{k-1}+u_{k+1} = u_1+(k-2)r+u_1+kr = u_1+u_1+(2k-2)r = u_1 + u_n$, donde resulta que $u_k - r + u_k + r = u_1 + u_n$, ou $2u_k = u_1 + u_n$, donde vem, $u_k = \frac{u_1 + u_n}{2}$.
Assim

$$\frac{n-1}{2} \times (u_1 + u_n) + \frac{u_1 + u_n}{2} = \frac{u_1 + u_n}{2} \times (n - 1 + 1) = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n.$$

Desta forma $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n$.

Pelo exposto resulta a proposição seguinte,

Proposição 3.3. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, (u_n) é dada por*

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n. \tag{3.8}$$

sendo n o número de termos considerados e u_1 e u_n o primeiro e o último desses termos.

Dada a sequência $(u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$, existem diversas aplicações em ciência da computação onde é importante saber a soma desses termos, ou seja, $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$. A soma anterior é representada pela seguinte notação

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matemático francês/italiano, propôs o uso da letra maiúscula grega sigma (Σ) para representar a soma de termos.

Exemplo 3.3. Determinar a soma dos n primeiros números inteiros positivos. Trata-se da soma dos n termos de uma progressão aritmética, onde o primeiro termo é 1 e o n-ésimo termo é n. Assim sendo:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{(u_1 + u_n) \times n}{2} = \frac{(1 + n) \times n}{2} = \frac{n + n^2}{2},$$

ou seja

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

Se se pretender adicionar termos consecutivos de uma progressão aritmética, sem começar no primeiro, desde u_k até u_n, tem-se:

$$u_k + u_{k+1} + \ldots + u_n = \sum_{p=k}^{n} u_p = \frac{u_k + u_n}{2} \times (n - k + 1)$$

3.5.4 Exercício

Com este exercício pretende-se calcular a soma de k termos de uma progressão aritmética. Considere-se a progressão aritmética $(u_1, u_1{+}r, u_1{+}2r, u_1{+}3r, \ldots)$ em que u_1 é o primeiro termo e r é a razão. Pretende-se calcular S_k, ou seja, a soma dos primeiros k termos da progressão:

$$S_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$$

Inicialmente considere-se o seguinte domínio dos parâmetros:
$r,\ u_1 \in \{-10, \ldots, 10\} \setminus \{0\}$ e $k \in \{1, \ldots, 20\}$.

Resolução:

De (3.8) vem que:

$$S_k = \frac{u_1 + u_k}{2} \times k.$$

Como $u_k = u_1 + (k-1) \times r$ vem:

$$S_k = \frac{u_1 + (u_1 + (k-1) \times r)}{2} \times k = k\left(u_1 + \frac{r(k-1)}{2}\right)$$

Desta forma a resposta correta do exercício será,

$$S_k = ku_1 + \frac{rk(k-1)}{2}.$$

Para a escolha múltipla, considerem-se as seguintes opções de resposta.

Escolhas múltiplas:

correta1 $S_k = ku_1 + \dfrac{rk(k-1)}{2}$

errada1 $S_k = ku_1$

errada2 $S_k = \dfrac{rk(k-1)}{2}$

errada3 $S_k = u_1 + \dfrac{rk(k-1)}{2}$

Como todas as respostas têm que ser diferentes, estude-se o caso em que ocorre igualdade para que seja feita uma escolha adequada de parâmetros de forma a garantir que todas as escolhas sejam distintas.

correta1 $=$ **errada1** ou seja, $ku_1 + \dfrac{rk(k-1)}{2} = ku_1$.

$$ku_1 + \frac{rk(k-1)}{2} = ku_1 \Leftrightarrow \frac{rk(k-1)}{2} = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee k = 0 \vee k = 1.$$

Esta igualdade ocorre quando $k = 1$, uma vez que $k = 0$ e $r = 0$ já estão excluídos no domínio dos parâmetros.

correta1 $=$ **errada2** ou seja, $ku_1 + \dfrac{kr(k-1)}{2} = \dfrac{rk(k-1)}{2}$.

$$ku_1 + \frac{rk(k-1)}{2} = \frac{rk(k-1)}{2} \Leftrightarrow ku_1 = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee u_1 = 0.$$

Esta igualdade nunca ocorre no domínio dos parâmetros escolhidos inicialmente.

correta1 $=$ **errada3** ou seja, $ku_1 + \dfrac{rk(k-1)}{2} = u_1 + \dfrac{rk(k-1)}{2}$.

$$ku_1 + \frac{rk(k-1)}{2} = u_1 + \frac{rk(k-1)}{2} \Leftrightarrow ku_1 - u_1 = 0 \Leftrightarrow u_1(k-1) = 0 \Leftrightarrow k = 1 \vee u_1 = 0.$$

Esta situação ocorre quando $k = 1$, uma vez que $u_1 = 0$ já foi excluído na escolha de parâmetros inicial.

errada1 $=$ **errada2** ou seja, $ku_1 = \dfrac{rk(k-1)}{2}$.

$$\begin{aligned} ku_1 = \frac{rk(k-1)}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad ku_1 - \frac{rk(k-1)}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad k(u_1 - \frac{r(k-1)}{2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad k = 0 \vee u_1 = \frac{r(k-1)}{2} \Leftrightarrow k = 0 \vee 2u_1 = r(k-1). \end{aligned}$$

Esta situação ocorre quando $2u_1 = r(k-1)$.

errada1 $=$ **errada3** ou seja, $ku_1 = u_1 + \dfrac{rk(k-1)}{2}$.

$$\begin{aligned} ku_1 = u_1 + \frac{rk(k-1)}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad ku_1 - u_1 - \frac{rk(k-1)}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u_1(k-1) - \frac{rk(k-1)}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (k-1)\left(u_1 - \frac{rk}{2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad k - 1 = 0 \vee u_1 - \frac{rk}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad k = 1 \vee 2u_1 = rk. \end{aligned}$$

Esta situação ocorre quando $k = 1$ ou $2u_1 = rk$.

errada2 $=$ **errada3** ou seja, $\dfrac{rk(k-1)}{2} = u_1 + \dfrac{rk(k-1)}{2}$.

$$\frac{rk(k-1)}{2} = u_1 + \frac{rk(k-1)}{2} \Leftrightarrow u_1 = 0.$$

Nunca ocorre a igualdade porque u_1 não toma o valor zero, pois este valor já foi excluído aquando da escolha dos parâmetros.

Excluindo $k = 1$, tem-se que ter em consideração apenas as seguintes situações $2u_1 = r(k-1)$ e $2u_1 = rk$.

No caso em que $2u_1 = r(k-1)$, consideram-se as seguintes escolhas:

Escolhas múltiplas:

correta1 $S_k = k\left(u_1 + \dfrac{2u_1}{2}\right) = 2ku_1$

errada1 $S_k = ku_1$

errada2 $S_k = \dfrac{2u_1k}{2} + 1 = ku_1 + 1$

errada3 $S_k = u_1 + \dfrac{2u_1k}{2} = u_1(1+k)$

No caso em que $2u_1 = rk$ considera-se:

Escolhas múltiplas:

correta1 $S_k = u_1(2k-1)$

errada1 $S_k = ku_1$

errada2 $S_k = u_1(k-1)$

errada3 $S_k = ku_1 + 1$

A escolha dos parâmetros definitiva é:

$$u_1 \in \{-10, -9, \ldots, 9, 10\} \setminus \{0\,, 1\},\ r \in \{-10, -9, \ldots, 9, 10\} \setminus \{0\},\ k \in \{2, \ldots, 20\}$$

Concretizando:

Considere uma progressão aritmética de primeiro termo $u_1 = -2$ e razão $r = 5$.

A soma dos primeiros 19 termos da progressão dada, S_{19}, é:

Escolha:

$$S_{19} = 817$$

Escolha:

$$S_{19} = -38$$

Escolha:

$$S_{19} = 855$$

Escolha:

$$S_{19} = 853$$

Resolução:

Dada uma progressão aritmética de primeiro termo u_1 e razão r tem-se $u_n = u_1 + (n-1)r$ e $S_n = \dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n.$

Como, neste caso, $u_1 = -2$ e $r = 5$, vem

$$u_{19} = -2 + (19-1)5 = 88$$

e, consequentemente,

$$S_{19} = \frac{u_1 + u_{19}}{2} \times 19 = \frac{-2+88}{2} \times 19 = 817.$$

3.6 Progressão Geométrica

As progressões geométricas constituem um tipo especial de sucessões definidas por recorrência, em que cada termo se obtém do anterior por multiplicação de uma constante designada por razão da progressão geométrica.

3.6.1 Definiçao e exemplos

Definição 3.7. *Uma sucessão (u_n) é progressão geométrica se e só se existe um número real r, tal que $u_{n+1} = u_n \times r$ para todo o número natural $n \geq 2$, isto é, cada termo da sucessão obtém-se do anterior multiplicando-o por uma constante r designada por razão da progressão geométrica.*

Uma forma de verificar se uma sucessão é uma progressão geométrica é verificar se o quociente entre cada termo e o anterior é constante; essa constante chama-se razão da progressão. Simbolicamente, uma sucessão (u_n) é uma progressão geométrica se e só se

$$r = \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$u_1 = u_1$$

$$u_2 = u_1 \times r$$

$$u_3 = u_2 \times r = (u_1 \times r) \times r = u_1 \times r^2$$

$$u_4 = u_3 \times r = (u_1 \times r^2) \times r = u_1 \times r^3$$

$$\ldots$$

$$u_n = u_{n-1} \times r = (u_1 \times r^{n-2}) \times r = u_1 \times r^{n-1}.$$

Proposição 3.4. *O termo geral de uma progressão geométrica de razão r e primeiro termo u_1 é dado por $u_n = u_1 \times r^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Mostra-se que $u_n = u_1 \times r^{n-1}$ usando o principio de indução matemática. Assim,
$P(1)$ é verdadeira, pois $u_1 = u_1 \times r^{1-1} = u_1 \times r^0 = u_1$
Supondo que $P(n)$ é verdadeira pretende-se provar que $P(n+1)$ é verdadeira.
Hipótese: $u_n = u_1 \times r^{n-1}$
Tese: $u_{n+1} = u_1 \times r^n$
Tem-se, por definição de progressão geométrica, que $u_{n+1} = u_n \times r$ e, por hipótese

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}.$$

Assim

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_1 \times r^{n-1} \times r \\ &= u_1 \times r^{n-1+1} \\ &= u_1 \times r^n, \end{aligned}$$

a relação é válida para $n+1$.
Ficou assim demonstrado, pelo principio de indução matemática, que o termo geral de uma progressão geométrica é dado por $u_n = u_1 \times r^{n-1}$. $\square$

Exemplos 3.5.

1. Toda a sucessão com termo geral a^n, $a \neq 0$, é uma progressão geométrica. De facto, $\frac{a^{n+1}}{a^n} = a$, logo, a base da potência é a razão da progressão geométrica.

2. Considere-se uma folha de papel suficientemente grande com $0,2mm$ de espessura. Dobrando sucessivamente a folha de papel ao meio, temos que a sua espessura vai duplicando. A sucessão das espessuras tem uma característica especial: cada termo é o dobro do anterior e, portanto, o quociente entre cada termo e o anterior é constante e igual a 2. O que permite concluir que a sucessão é uma progressão geométrica de razão 2.

A monotonia das progressões geométricas, bem como o serem ou não limitadas, depende do valor da razão r e do primeiro termo u_1. Como $\frac{u^{n+1}}{u^n} = r$, vem que:

- Uma progressão geométrica (u_n) de razão positiva é sempre monótona, podendo ser crescente ou decrescente (em sentido estrito ou lato), dependendo do sinal do primeiro termo. Assim se $0 < r < 1$ e $u_1 < 0$ ou $r > 1$ e $u_1 > 0$, (u_n) é monótona crescente. Por exemplo:

  1. $-8, -4, -2, -1, \ldots (r = \frac{1}{2} \quad e \quad u_1 = -8)$
  2. $4, 8, 16, 32, \ldots (r = 2 \quad e \quad u_1 = 4)$

  Se $r = 1$, (u_n) é constante. Por fim se $0 < r < 1$ e $u_1 > 0$ ou $r > 1$ e $u_1 < 0$, (u_n) é monótona decrescente. Por exemplo:

  1. $8, 4, 2, 1, \ldots (r = \frac{1}{2} \quad e \quad u_1 = 8)$
  2. $-4, -8, -16, -32, \ldots (r = 2 \quad e \quad u_1 = -4)$

- Uma progressão geométrica de razão negativa nunca é monótona, pois os termos são alternadamente positivos e negativos.

Resumindo,

	$u_1 > 0$	$u_1 < 0$
$r < -1$	não monótona e não limitada	não monótona e não limitada
$r = -1$	não monótona e limitada	não monótona e limitada
$-1 < r < 0$	não monótona e limitada	não monótona e limitada
$r = 1$	constante e limitada	constante e limitada
$0 < r < 1$	decrescente e limitada	crescente e limitada
$r > 1$	crescente e não limitada	decrescente e não limitada

3.6.2 Exercício

No exercício seguinte pretende-se identificar/calcular termos e razão de uma progressão geométrica conhecido o seu termo geral.

Exercício 1: Considere-se a progressão geométrica $u_n = \dfrac{ab^{n+p}}{c^n}$. Pretende-se identificar o primeiro termo e a razão.

O **domínio dos parâmetros** é o seguinte:

a, b, $c \in \{-10, \ldots, 10\} \setminus \{0\}$ e $p \in \{1, \ldots, 20\}$

Resolução: Como

$$r = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{ab^{n+1+p}}{c^{n+1}}}{\dfrac{ab^{n+p}}{c^n}} = \frac{b}{c}$$

e

$$u_1 = \frac{ab^{1+p}}{c},$$

a resposta correta é, o primeiro termo é $u_1 = \dfrac{ab^{1+p}}{c}$ e a razão é $r = \dfrac{b}{c}$.

Para opções de resposta considerem-se as seguintes escolhas,

Escolhas múltiplas:

correta1 O primeiro termo é $u_1 = \dfrac{ab^{1+p}}{c}$ e a razão é $r = \dfrac{b}{c}$

errada1 O primeiro termo é $u_1 = \dfrac{ab^{1+p}}{c}$ e a razão é $r = \dfrac{c}{b}$.

errada2 O primeiro termo é $u_1 = \dfrac{(ab)^{1+p}}{c}$ e a razão é $r = \dfrac{b}{c}$.

errada3 O primeiro termo é $u_1 = \dfrac{(1+p)(ab)}{c}$ e a razão é $r = \dfrac{b}{c}$.

Como todas as opções de resposta têm que ser distintas vamos estudar o caso em que tal não acontece. Considere-se à partida que, a, b e c são não nulos. Assim

correta1 $=$ **errada1** ou seja, $\dfrac{b}{c} = \dfrac{c}{b}$

Esta situação ocorre quando $|b| = |c|$, basta impor que $b \neq \pm c$.

Se $|b| = |c| \Rightarrow r = \pm 1$. Faça-se neste caso em errada1, $r = |b| + 1$ e já não ocorre a igualdade, pois se $r = |b| + 1$ nunca ocorre $|b| + 1 = \dfrac{b}{c}$.

correta1 $=$ **errada2** ou seja, $\dfrac{ab^{1+p}}{c} = \dfrac{(ab)^{1+p}}{c}$

$$\begin{aligned}
\frac{ab^{1+p}}{c} = \frac{(ab)^{1+p}}{c} \quad &\Leftrightarrow \quad ab^{1+p} = (ab)^{1+p} \\
&\Leftrightarrow \quad ab^{1+p} = a^{1+p}b^{1+p} \\
&\Leftrightarrow \quad a = a^{1+p} \\
&\Leftrightarrow \quad a - a^{1+p} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a(1 - a^p) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \vee \quad a^p = 1
\end{aligned}$$

$a^p = 1$ ocorre quando $a = 1$ ou $a = -1$ e p par ou $p = 0$.

A situação em que os parâmetros tomam o valor 0 já está excluída na escolha inicial.

Para que correta1 $\neq$ errada2 basta que $a \neq 1$ e $a \neq -1$.

correta1 $=$ **errada3**

$$\begin{aligned}
\frac{(1+p)(ab)}{c} = \frac{ab^{1+p}}{c} \quad &\Leftrightarrow \quad (1+p)(ab) = ab^{1+p} \\
&\Leftrightarrow \quad (1+p)b = b^{1+p} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + p = b^p \\
&\Leftrightarrow \quad b^p - p = 1
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre quando $b = 2$ e $p = 1$. (Testado em Ibertools).

errada1 = **errada2** ou seja, $\dfrac{ab^{1+p}}{c} = \dfrac{(ab)^{1+p}}{c} \quad \wedge \quad \dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{c}$.

Daqui sai que $a = 0$ ou $a^p = 1$ e $|b| = |c|$.

Já estudado anteriormente.

errada1 = **errada3** ou seja, $\dfrac{ab^{1+p}}{c} = \dfrac{(1+p)(ab)}{c} \quad \wedge \quad \dfrac{c}{b} = \dfrac{b}{c}$.

Daqui sai que $b^p - p = 1$ e $|b| = |c|$, que é um caso já estudado anteriormente.

errada2 = **errada3** ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{(ab)^{1+p}}{c} = \frac{(1+p)(ab)}{c} \quad &\Leftrightarrow \quad (ab)^{1+p} = (1+p)(ab) \\ &\Leftrightarrow \quad (ab)^p = 1+p \end{aligned}$$

Esta situação ocorre quando

i. $a = -2 \wedge b = -1 \wedge p = 1$

ii. $a = -1 \wedge b = -2 \wedge p = 1$

iii. $a = 2 \wedge b = 1 \wedge p = 1$

Para que esta situação nunca se verifique basta fazer $p \neq 1$.

A escolha definitiva de parâmetros é

$$a \in \{-10, \ldots, 10\} \setminus \{-1, 0, 1\},\ b,\ c \in \{-10, \ldots, 10\} \setminus \{0\},\ p \in \{2, \ldots, 20\}.$$

Concretizando: Considere-se $u_n = \dfrac{2 \times 3^{n+1}}{5^n}$. Neste caso o primeiro termo da sucessão é $u_1 = \dfrac{2 \times 3^2}{5} = \dfrac{18}{5}$ e a razão é $r = \dfrac{3}{5}$.

3.6.3 Soma dos termos de uma progressão geométrica

Proposição 3.5. *Seja (u_n) uma progressão geométrica de razão r. A soma dos n primeiros termos de (u_n), S_n, é definida por*

$$S_n = \begin{cases} u_1 \times \dfrac{1-r^n}{1-r} & se \quad r \neq 1 \\ n \times u_1 & se \quad r = 1 \end{cases} \tag{3.9}$$

Demonstração. Partindo da definição de S_n vem

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-1} + u_n. \tag{3.10}$$

Surgem duas situações:

- No caso em que $r = 1$ tem-se a sucessão constante em que, $u_n = u_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $S_n = u_1 + u_1 + u_1 + u_1 + \ldots + u_1 = n \times u_1$;
- No caso em que $r \neq 1$, multiplicando ambos os lados da expressão (3.10) por r, obtém-se $r \times S_n = r \times u_1 + r \times u_2 + r \times u_3 + r \times u_4 + \ldots + r \times u_{n-1} + r \times u_n$.

Como, por definição de progressão geométrica, $r \times u_1 = u_2$; $r \times u_2 = u_3 \ldots$
vem que

$$r \times S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + r \times u_n \tag{3.11}$$

Subtraindo membro a membro (3.10) e (3.11) tem-se:
$S_n - r \times S_n = (u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n-1} + u_n) - (u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + r \times u_n)$
Simplificando $S_n - r \times S_n = u_1 - r \times u_n = u_1 - u_1 \times r^n$ donde resulta

$$\begin{aligned} S_n(1-r) = u_1 - u_1 \times r^n \quad &\Leftrightarrow \quad S_n = \frac{u_1 - u_1 \times r^n}{1-r} \\ &\Leftrightarrow \quad S_n = \frac{u_1(1-r^n)}{1-r} \\ &\Leftrightarrow \quad S_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.4. Seja u_n o termo geral de uma progressão geométrica de razão $r = -1$. Pretende-se determinar S_n.
Como $S_n = u_1 \times \dfrac{1-(-1)^n}{1+1} = u_1 \times \dfrac{1-(-1)^n}{2}$, vem

$$S_n = \begin{cases} 0 \text{ se } \ n \text{ é par} \\ u_1 \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

3.6.4 Exercício

Com este exercício pretende-se calcular a soma de k termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Dada a progressão geométrica de primeiro termo u_1 e razão r, a soma dos seus primeiros k termos é, $S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k$

Para resolução do exercício considerem-se r, $u_1 \in \mathbb{Z}$, com $r\,, u_1 \in \{-10, \ldots, 10\} \setminus \{0\,, 1\}$ e $k \in \{1, \ldots, 20\}$.

Para obter o valor de S_k basta substituir na expressão (3.9), n por k,ou seja $S_k = u_1 \times \dfrac{1-r^k}{1-r}$ em que u_1 é o primeiro termo e r é a razão.

Quanto à elaboração das respostas da escolha múltipla,

correta1 $S_k = u_1 \times \dfrac{1-r^k}{1-r}$

errada1 $S_k = u_1 \times \dfrac{(1-r)^k}{1-r}$

errada2 $S_k = u_1 \times \dfrac{1-r^k}{r-1}$

errada3 $S_k = u_1$

Como as opções de resposta têm que ser distintas, estude-se os casos em que tal não acontece:

No domínio inicial de parâmetros considerou-se que $r \neq 0$, $r \neq 1$, $u_1 \neq 0$ e $u_1 \neq 1$.

correta1 = **errada1** ou seja, $u_1 \times \dfrac{1-r^k}{1-r} = u_1 \times \dfrac{(1-r)^k}{1-r}$.

$$\begin{aligned} u_1 \times \frac{1-r^k}{1-r} = u_1 \times \frac{(1-r)^k}{1-r} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1-r^k}{1-r} = \frac{(1-r)^k}{1-r} \\ &\Leftrightarrow \quad 1-r^k = (1-r)^k. \end{aligned}$$

No domínio dos parâmetros a igualdade verifica-se quando $k = 1$.

correta1 = **errada2** ou seja, $u_1 \times \dfrac{1-r^k}{1-r} = u_1 \times \dfrac{1-r^k}{r-1}$.

$$\begin{aligned} u_1 \times \frac{1-r^k}{1-r} = u_1 \times \frac{1-r^k}{r-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1-r^k}{1-r} = \frac{1-r^k}{r-1} \\ &\Leftrightarrow \quad 1-r^k = -1+r^k \\ &\Leftrightarrow \quad r^k = 1. \end{aligned}$$

No domínio dos parâmetros esta situação ocorre se $r=-1$ e k par.

correta1 = **errada3** ou seja, $u_1 \times \dfrac{1-r^k}{1-r} = u_1$.

$$\begin{aligned} u_1 \times \frac{1-r^k}{1-r} = u_1 \quad &\Leftrightarrow \quad u_1 = 0 \vee \frac{1-r^k}{1-r} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad u_1 = 0 \vee 1-r^k = 1-r \\ &\Leftrightarrow \quad u_1 = 0 \vee r - r^k = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u_1 = 0 \vee r(1-r^{k-1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u_1 = 0 \vee r = 0 \vee r^{k-1} = 1 \end{aligned}$$

A situações em que $u_1 = 0\,, r = 0$ nunca ocorrem. O caso em que $r^{k-1} = 1$, acontece quando $r=1$, já excluído inicialmente e, $r=-1$ se k é par. Para que esta situação nunca se verifique basta excluir $r=-1$.

errada1 = **errada2** ou seja, $u_1 \times \dfrac{(1-r)^k}{1-r} = u_1 \times \dfrac{1-r^k}{1-r}$.

$$\begin{aligned} u_1 \times \frac{(1-r)^k}{1-r} = u_1 \times \frac{1-r^k}{1-r} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(1-r)^k}{1-r} = \frac{1-r^k}{1-r} \\ &\Leftrightarrow \quad (1-r)^k = -1+r^k \end{aligned}$$

Esta igualdade nunca ocorre no domínio dos parâmetros (testado em hibertools).

errada1 = **errada3** ou seja, $u_1 \times \dfrac{(1-r)^k}{1-r} = u_1$.

$$\begin{aligned} u_1 \times \frac{(1-r)^k}{1-r} = u_1 &\Leftrightarrow \frac{1-r^k}{1-r} = 1 \\ &\Leftrightarrow 1-r^k = 1-r \\ &\Leftrightarrow -r^k + r = 0 \\ &\Leftrightarrow r(-r^{k-1}+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow r = 0 \vee r^{k-1} = 1 \end{aligned}$$

Esta situação ocorre quando $k = 1$ ou $r = -1$ e k ímpar .

errada2 = **errada3** ou seja, $u_1 \times \dfrac{1-r^k}{r-1} = u_1$.

$$\begin{aligned} u_1 \times \frac{1-r^k}{r-1} = u_1 &\Leftrightarrow \frac{1-r^k}{r-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow 1-r^k = r-1 \\ &\Leftrightarrow -r^k - r = -2 \\ &\Leftrightarrow r^k + r = 2 \end{aligned}$$

A igualdade acontece quando $r = -2$ e $k = 2$ (testado em hibertools.)

Faça-se alteração na escolha inicial de parâmetros,

$$u_1 \in \{-10,-9,\ldots,9,10\} \setminus \{0\,,1\},\ r \in \{-10,-9,\ldots,9,10\} \setminus \{-1,\ 0\,,1\,\},\ k \in \{3,\ldots,20\}$$

3.7 Convergência de uma sucessão

A noção de limite é uma das mais dificeis de ser compreendida. Este conceito para alunos do ensino secundário deve ser explorado usando imagens e introduzindo exemplos simples antes de passar para a sua utilização e determinação de limites mais elaborados.
Começamos por introduzir alguns dos conceitos necessários à definição de limite que apresentaremos nesta dissertação.

3.7.1 Definições e exemplos

O conceito de valor aproximado é introduzido ainda no 1º ciclo, por exemplo no cálculo de áreas simples e explorado posteriormente quando se trata de radicais, mas sem nunca ser formalizado efetivamente.

Por exemplo, quando se diz que $\pi \approx 3.14$ comete-se um erro dado por $|\pi - 3.14|$. Poderíamos dizer que 3.14 está numa vizinhança de π de raio 0.01, ou seja, que $|\pi - 3.14| < 0.01$.

Definição 3.8. *Seja $a \in \mathbb{R}$. Chama-se **vizinhança** de centro em a e raio $\delta > 0$, e denota-se $V_\delta(a)$ ao conjunto $V_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} =]a - \delta, a + \delta[$.*

Usando o conceito de vizinhança podemos formular uma definição de limite.

Definição 3.9. *Diz-se que um número real a é limite da sucessão (u_n), ou que (u_n) converge para a, e escreve-se*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \quad \textit{ou} \quad a_n \to a \quad \textit{ou abreviadamente} \quad \lim u_n = a,$$

se para cada número real positivo δ for possível fazer corresponder uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que todos os termos da sucessão de ordem superior ou igual a p estejam na vizinhança de centro a e raio δ, isto é,

$$\forall n \geq p \Rightarrow |u_n - a| < \delta.$$

Simbolicamente escrever-se-á

$$a = \lim u_n \Leftrightarrow \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, p \in \mathbb{N} \,:\, n \geq p \Rightarrow |u_n - a| < \delta$$

A condição $|u_n - a| < \delta$, pode tomar a seguinte forma

$$-\delta < u_n - a < \delta$$

ou

$$a - \delta < u_n < a + \delta.$$

Uma sucessão que satisfaça a definição anterior diz-se convergente. No caso contrário, isto é, se

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, p \in \mathbb{N} \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : n \geq p \quad \Rightarrow |u_n - a| \geq \delta,$$

a sucessão (u_n) diz-se divergente.

Note-se que a definição de limite não nos conduz à sua determinação, mas apenas à prova de que um dado valor é o limite de uma sucessão.

Exemplo 3.5. Considere-se a sucessão de termo geral $a_n = \dfrac{2}{n}$. Mostre-se, por definição, que $\lim u_n = 0$.

Pretende-se provar que,

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |u_n - 0| < \delta.$$

Note-se que

$$|u_n - 0| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{2}{n} - 0\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{2}{n} < \delta \tag{3.12}$$

Como $n \geq 1$ e $\delta > 0$, a desigualdade 3.12 é equivalente a

$$n > \frac{2}{\delta}$$

Para todos os valores de n nestas condições a desigualdade 3.12 é satifeita. Basta assim considerar $p \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq \dfrac{2}{\delta}$, por exemplo

$$p = \left[\frac{2}{\delta}\right] + 1,$$

onde $\left[\dfrac{2}{\delta}\right]$ representa a caraterística de $\dfrac{2}{\delta}$.

Tem-se assim que,

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, p = \left[\frac{2}{\delta}\right] + 1 \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |u_n - 0| < \delta.$$

Ficou assim provado que a sucessão converge para zero.

Graficamente tem-se,

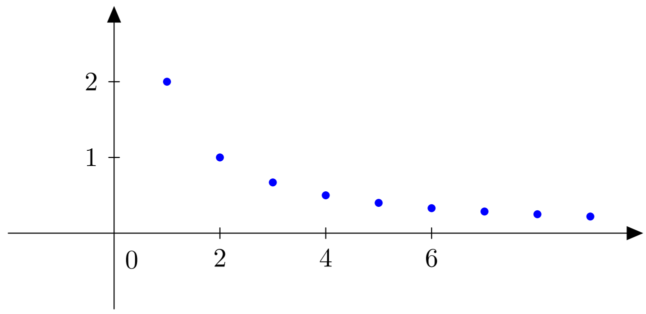

Figura 3.7: $u_n = \dfrac{2}{n}$

A definição apresentada acima aplica-se a limites reais. Contudo, basta considerar a sucessão de termo geral $u_n = n$ para perceber que esta sucessão não tem limite real.

É impossível utilizar a expressão limite, sem fazer referência à expressão infinito. O que é infinito? Para chegar ao conceito pode-se pensar na possibilidade de acrescentar sucessivamente uma unidade na contagem de números, tornando infindável este processo. Infinito surge assim associado a uma quantidade que não termina. Etimologicamente, a palavra infinito significa não acabado.

Explícita ou implicitamente, a ciência atual precisa de usar o conceito infinito para o seu desenvolvimento, qualquer que seja o seu ramo.

Começa-se por analisar duas histórias envolvendo a ideia de infinito [8], [14].

Hotel Infinito

Era uma vez um hotel no meio das montanhas. Era tão procurado por tanta gente que o proprietário decidiu ampliá-lo. Mesmo assim estava sempre ocupado e por isso ele continuou a ampliá-lo até que um dia se tornou infinitamente grande.

Um dos requisitos para se ser rececionista no Hotel Infinito era ter um conhecimento sólido sobre o infinito. José candidatou-se, foi entrevistado e começou a trabalhar na noite seguinte. Calculou que, dado que o hotel tinha um número infinito de quartos, não haveria qualquer problema em arranjar quarto para os novos hóspedes.

Quando José substituiu a rececionista do turno de dia, ela informou-o de que havia um número infinito de quartos ocupados. Assim que ela saiu, chegou um turista, para ser hospedado. José

consultou a lista, mas não conseguiu encontrar um quarto vazio. Deu ordens para transferir cada hóspede para o quarto seguinte ao que ocupava, sendo assim possível tornar vago o quarto número 1. Tinha acabado de hospedar o turista quando chegou um autocarro infinito, com um número infinito de novos hóspedes. Como arranjar quarto para todos, agora?
Possível resposta ao problema: O José resolveu deslocar cada hóspede para o quarto cujo número fosse o dobro do número do quarto ocupado anteriormente, portanto o hóspede do quarto 1 foi para o quarto 2, o do quarto 2 foi para o quarto 4, o do quarto 3, foi para o quarto 6 e assim sucessivamente. Deste modo, ficaram vagos todos os quartos ímpares. Nestes quartos poderão ficar os recém-chegados.
Associada ao hotel infinito está a sucessão (u_n) definida por $u_1 = 1$ e $u_{n+1} = 2u_n$, trata-se de uma progressão geométrica de razão 2 pelo que $u_n = 2^{n-1}$. Relativamente à sucessão (u_n), dado qualquer número positivo L existe uma ordem a partir da qual se tem $2^{n-1} > L$: basta tomar $n > 1 + \log_2 L$.

História das pulgas

Certo dia duas pulgas estão à conversa sobre as distâncias que conseguem atingir com os seus saltos. Uma delas pretende deslocar-se de um lado de um quarto para o outro. A outra pulga faz uma aposta com ela dizendo que esta nunca atingirá o outro lado da divisão se der apenas saltos que cubram metade da distância a percorrer. Ela aceita a aposta dizendo que não terá qualquer dificuldade em ganhá-la! Qual das pulgas tem razão?
Possível resposta ao problema : O seu primeiro salto leva-a até metade do quarto, o segundo cobre metade da distância restante, o terceiro salto, metade da distância que falta percorrer, e assim sucessivamente.

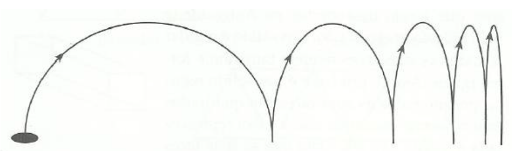

Figura 3.8

Embora se encontre mais perto da outra extremidade, tem de manter a promessa, de que cada salto só pode cobrir metade da distância restante. E, a não ser que desista, a pulga por muito que salte nunca atingirá a outra extremidade.

Associada à história das pulgas está a sucessão (v_n) definida por $v_1 = a > 0$, (em que a é o comprimento do quarto) e $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2}$, que é uma progressão geométrica com razão $\dfrac{1}{2}$ e $v_n = \dfrac{a}{2^{n-1}}$.

Definição 3.10. *Uma sucessão (u_n) é um **infinitamente grande positivo**, quando, para todo o número positivo L existe uma ordem p, a partir da qual se tem $u_n > L$.*
Diz-se, neste caso, que o limite da sucessão é mais infinito e escreve-se $\lim u_n = +\infty$ *ou* $u_n \longrightarrow +\infty$.
Simbolicamente:

$$u_n \to +\infty \Leftrightarrow \forall L > 0\, \exists p \in \mathbb{N} : \; n \geq p \Rightarrow u_n > L$$

São exemplos de infinitamente grande positivo as sucessões do tipo:

- $u_n = a \times n$
- $b_n = a \times 2^n$
- $c_n = \sqrt{a \times n}$
- $d_n = a \times n^c + b,$

com a e c números positivos.

Definição 3.11. *Uma sucessão (u_n) diz-se um **infinitamente grande negativo** quando a sucessão $(-u_n)$ for um infinitamente grande positivo.*
Diz-se neste caso que o limite da sucessão é menos infinito e escreve-se $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, *ou* $u_n \to -\infty$. *Simbolicamente,*

$$u_n \to -\infty \Leftrightarrow \forall L > 0\, \exists p \in \mathbb{N} : \; n \geq p \Rightarrow -u_n > L$$

São exemplos de infinitamente grande negativo as sucessões do tipo:

- $a_n = -an^3 + b$
- $b_n = -a \times 2^n$
- $c_n = -\sqrt{a \times n}$

- $d_n = -a \times n^c + b$,

com a e c números positivos.

Definição 3.12. *Uma sucessão (u_n) é um* ***infinitamente grande em módulo*** *quando a sucessão $(|u_n|)$ é um infinitamente grande positivo.*

Definição 3.13. *Uma sucessão (u_n) é um* ***infinitamente grande sem sinal determinado*** *quando for um infinitamente grande em módulo, mas não for um infinitamente grande positivo nem negativo. Diz-se, neste caso, que o limite da sucessão é infinito e escreve-se* $\lim u_n = \infty$ *ou $u_n \to \infty$. Isto é,*

$$u_n \to \infty \Leftrightarrow \forall L > 0\, \exists\, p \in \mathbb{N} : \ n \geq p \Rightarrow |u_n| > L$$

São exemplos de infinitamente grande sem sinal determinado as sucessões do tipo:

- $a_n = (-1)^n n^p + b$
- $c_n = (-1)^n \sqrt{a \times n}$
  com $b \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{N}$ e $a > 0$.

Das definições apresentadas resulta que todos os infinitamente grande positivos e todos os infinitamente grandes negativos são infinitamente grandes em módulo. Os infinitamente grandes são sucessões divergentes já que não têm limite real.
Se uma sucessão tende para mais infinito ou menos infinito diz-se que a sucessão é propriamente divergente. As sucessões que são infinitamente grandes em módulo mas cujo limite não é $+\infty$ nem $-\infty$ dizem-se infinitamente grandes oscilantes.
Assim quanto à existência e natureza do limite, as sucessões classificam-se da seguinte forma:

- Convergentes - têm limite e o limite é um número real.
- Divergentes: (não convergentes)
  - Propriamente divergentes - têm limite $+\infty$ ou $-\infty$;
  - Infinitamente grandes oscilantes;
  - Não infinitamente grandes mas sem limite real.

Exemplos 3.6. Considerem-se alguns exemplos de sucessões convergentes e divergentes.

1. As sucessões de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n}$ e $v_n = \dfrac{2}{3^n}$ são infinitésimos, isto é o seu limite é zero.

2. A sucessão definida por $u_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ é convergente e o seu limite é 2.

3. As sucessões de termo geral $u_n = 2n+3$ e $v_n = 8+n^2$ são infinitamente grandes positivos.

4. As sucessões $(-(2n+3))_n$ e $\left(8-n^2\right)_n$ são infinitamente grandes negativos.

5. A sucessão de termo geral $u_n = (-1)^n 2n$ é um infinitamente grande em módulo, mas não tende nem para $+\infty$ nem para $-\infty$. É um infinitamente grande oscilante.

6. A sucessão $\left((-1)^n \dfrac{n+1}{n}\right)_n$ é uma sucessão oscilante. A sucessão dos módulos tende para 1, contudo a sucessão não tem limite.

7. A sucessão de termo geral $c_n = \cos n$ não tem limite.

Definição 3.14. *Uma sucessão* (u_n) *é um* ***infinitamente pequeno*** *ou* ***infinitésimo*** *quando o seu limite é zero. Simbolicamente:*

$$\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \forall\, \delta > 0\, \exists\, p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |u_n| < \delta$$

Os alunos têm muito a ideia de que uma sucessão crescente é um infinitamente grande e que uma sucessão decrescente é um infinitésimo, contudo,

Nem tudo o que cresce é um infinitamente grande positivo, nem tudo o que é um infinitésimo decresce.

A **curva do floco de neve** ilustra bem esta afirmação. O seu nome resulta da forma semelhante que os flocos de neve assumem quando se formam. O floco de neve foi referido pela 1ª vez em 1904 pelo matemático sueco Helge Von Kock como exemplo de uma curva de comprimento infinito, que abrange uma área finita. Hoje classifica-se como um fractal [19], [20].

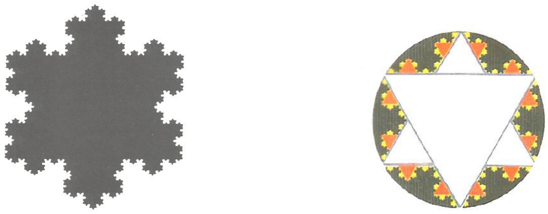

Figura 3.9: Floco de neve

Para gerar uma destas curvas, observe-se a sequência de figuras obtidas a partir de um triângulo equilátero, em que dividindo cada lado do triângulo em três partes iguais, se desenha na parte central de cada segmento um novo triângulo equilátero, eliminando a base, que pertencia ao segmento anterior, antes de ser divido em três partes iguais.

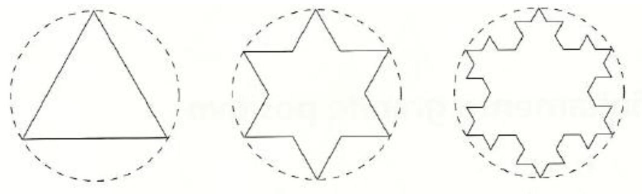

Figura 3.10: Construção da curva floco de neve

Saliente-se a forma como cada lado se transforma quando se pretende obter o termo seguinte desta sucessão:

Figura 3.11: Ilustração do lado do triângulo da curva floco de neve

No que se segue pretende-se estudar o perímetro e a área deste conhecido polígono fractal, conhecido também por **curva de Koch**.

Comece-se por calcular P_n, perímetro do polígono resultante em cada fase.

Na fase inicial tem-se 3 segmentos de comprimento 1, logo tem-se o perímetro $P_1 = 3$.

Na fase seguinte tem-se 3×4 segmentos cada um de comprimento $\frac{1}{3}$, assim

$$P_2 = 3 \times 4 \times \frac{1}{3},$$

isto é,

$$P_2 = 3 \times \frac{4}{3}.$$

Na fase 3, como em cada segmento já existente vai-se fazer surgir quatro, o número de segmentos é $(3 \times 4) \times 4$, isto é 3×4^2. O comprimento de cada segmento é $\frac{1}{9}$, ou seja, $\left(\frac{1}{3}\right)^2$. Obtém-se assim, para perímetro

$$P_3 = 3 \times 4^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2.$$

Supondo que se prolonga este procedimento, na fase n ter-se-ão $3 \times 4^{n-1}$ segmentos de comprimento $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ e o perímetro do polígono, P_n, será

$$P_n = 3 \times 4^{n-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}.$$

O que se passará com a sucessão das áreas?

A área do polígono, em cada fase, obtém-se adicionando à área do polígono da fase anterior a área de um triângulo equilátero, cujo lado é $\frac{1}{3}$ do anterior, multiplicada tantas vezes como o número de lados do polígono anterior.

Assim tem-se para área na fase inicial,A_1,

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

correspondendo à área do triângulo inicial.

Pela semelhança das figuras planas, sabe-se que, se o lado de um polígono sofre uma redução de razão $\frac{1}{3}$, a área sofre uma redução de razão $\frac{1}{9}$. Assim, na fase 2,

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

isto é,

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + 3 \times \frac{1}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right).$$

Na fase 3, como se tem 3×4 segmentos

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + (3 \times 4) \times \left(\frac{1}{9}\right)^2 \times \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right]$$

isto é

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9}\right].$$

Continuando sucessivamente, obter-se-á, na fase n :

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{3} \times \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right].$$

Verifica-se assim que o perímetro cresce indefinidamente.

A sucessão (P_n) dos perímetros das figuras, sendo uma sucessão monótona crescente e ilimitada, é um infinitamente grande positivo. Já a sucessão (A_n) das áreas das figuras é monótona crescente, mas não é um infinitamente grande positivo, visto que a área das figuras nunca ultrapassa, por exemplo, a área do círculo onde as figuras se inscrevem.

Exemplo 3.6. Considere-se a sucessão de termo geral $u_n = -\dfrac{5}{n}$. Esta sucessão é monótona crescente e no entanto tende para zero.

De facto, os primeiros termos são : $-5; -\dfrac{5}{2}; -\dfrac{5}{3}; -\dfrac{5}{4}; \ldots$ que sugerem que a sucessão é crescente, mas não basta analisar um número finito de termos.

Verifique-se que $u_{n+1} - u_n > 0\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -\frac{5}{n+1} - \left(-\frac{5}{n}\right) \\ &= -\frac{5}{n+1} + \frac{5}{n} \\ &= \frac{-5n + 5n + 5}{n(n+1)} \\ &= \frac{5}{n(n+1)} > 0\,, \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Podemos então afirmar que a sucessão é monótona crescente, já que $u_{n+1} > u_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, calculando alguns termos de ordem mais elevada, como por exemplo, $u_{100} = -0,05$; $u_{1000} = -0,005$; $u_{10000} = -0,0005$; $\ldots$, parece indicar que os termos se aproximam de zero.

Efetivamente, dado um qualquer número $\delta > 0$, existe uma ordem a partir da qual os termos estão muito próximos de zero, ou seja

$$\left|-\frac{5}{n}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{5}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{5}{\delta}.$$

Os termos desta sucessão são, em módulo, inferiores a δ, desde que a sua ordem seja superior a $\frac{5}{\delta}$. Portanto a sucessão dada (u_n) é um infinitésimo.

Observação 3.4. Uma sucessão (u_n) é convergente para a ou tem limite a, com $a \in \mathbb{R}$, se e só se $u_n - a$ é um infinitésimo, isto é, a sucessão (u_n) é convergente para a se para todo $\delta > 0$, existe uma ordem a partir da qual se tem $|u_n - a| < \delta$. Esta condição é equivalente a

$$-\delta < u_n - a < \delta \Leftrightarrow a - \delta < u_n < a + \delta.$$

Teorema 3.2. *Se uma sucessão é convergente, então o limite para o qual converge é único.*

Demonstração. Por redução ao absurdo:
Suponha-se que a sucessão (u_n) converge simultaneamente para a e b com $a \neq b$. Ou seja, $u_n \to a$ e $u_n \to b$, com $a \neq b$.
Dado $\delta > 0$ arbitrário, existe uma ordem p_1 a partir da qual

$$|u_n - a| < \frac{\delta}{2}. \tag{3.13}$$

Existe também uma ordem p_2 a partir da qual

$$|u_n - b| < \frac{\delta}{2}. \tag{3.14}$$

Tome-se $p = \max\{p_1, p_2\}$.
Tem-se que para $n \geq p$ são válidas as desigualdades (3.13) e (3.14) e como

$$|a - b| = |a - u_n + u_n - b| \leq |a - u_n| + |u_n - b| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

O que está em contradição com a hipótese de $a \neq b$, já que $|a - b| < \delta$ para todo o $\delta > 0$, implica $a = b$.

□

Teorema 3.3. *O limite de uma sucessão constante é a própria constante.*

Demonstração. Pretende-se provar que se $u_n = k, \forall n \in \mathbb{N}$ então (u_n) converge para k (k constante).
$u_n = k$, logo $u_n - k = k - k = 0$ e consequentemente $|u_n - k| = 0$.
Donde se conclui que $(u_n - k)$ converge para zero, logo a sucessão (u_n) converge para k.

□

Teorema 3.4. *Se (u_n) é uma sucessão convergente então $(|u_n|)$ também converge e*

$$\lim |u_n| = |\lim u_n|.$$

Demonstração. Considere-se que (u_n) converge para a, isto é, qualquer que seja $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n > p$ se tem $|u_n - a| < \delta$.
Como

$$||u_n| - |a|| \leq |u_n - a| < \delta,$$

conclui-se que $|u_n|$ converge para $|a|$, isto é,

$$\lim |u_n| = |\lim u_n|$$

. □

3.7.2 Teoremas sobre limites

Faz-se referência em seguida a importantes resultados que estabelecem relações entre os conceitos de sucessão limitada, sucessão monótona, sucessão convergente e operações com sucessões convergentes

Teorema 3.5. *Toda a sucessão convergente é limitada.*

Demonstração. Suponha-se que (u_n) converge para a e fixe-se um valor real $\delta > 0$. Para esse δ, existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq p$ tem-se que

$$u_n \in]a - \delta; a + \delta[, \quad \text{ou seja,} \quad a - \delta < u_n < a + \delta.$$

Fora deste intervalo, ficam, eventualmente, um número finito de termos da sucessão, a saber: $u_1, u_2, \ldots, u_p$.
Considere-se $M = \max\{|u_1|; \ldots; |u_p|; |a-\delta|; |a+\delta|\}$
Então

$$-M \leq u_n \leq M, \, \forall n \in \mathbb{N},$$

pelo que (u_n) é uma sucessão limitada. □

Teorema 3.6. *Toda a sucessão monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sucessão monótona e limitada. Como o conjunto dos termos da sucessão é majorado (resp. minorado) então existe supremo (resp. ínfimo) desse conjunto. Designe-se por $c = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Pela definição de supremo, menor dos majorantes, qualquer que seja $L > 0$, $c - L$ já não é majorante, isto é, existe pelo menos um $p \in \mathbb{N}$ tal que $c - L < u_p$.
Como a sucessão (u_n) é monótona poderá ser crescente ou decrescente. Suponhamos que (u_n) é crescente; então $u_p \leq u_n$ para todo $n \geq p$. Atendendo ao facto de que c é o supremo do conjunto dos termos, pode-se escrever, desde que $n \geq p$,

$$c - L < u_p \leq u_n \leq c < c + L$$

ou seja,

$$\forall L > 0 \, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow c - L < u_n < c + L$$

isto é, $u_n \to c$.
Então (u_n) é uma sucessão convergente para o supremo do conjunto dos seus termos.

No caso da sucessão (u_n) ser decrescente usa-se o facto do conjunto dos seus termos ser minorado, o que permite concluir que existe o ínfimo desse conjunto. Seja d o ínfimo, isto é,

$$d = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Pela definição de infímo, maior dos minorantes, qualquer que seja $L > 0$, o número $d + L > 0$ já não é minorante. Pode assim afirmar-se que existe pelo menos uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que

$d + L > u_p$.

Sendo a sucessão decrescente, pode escrever-se a seguinte desigualdade

$$u_n \leq u_p < d + L, \ \forall n \geq p$$

Pelo facto de d ser o infímo do conjunto dos termos da sucessão, é menor que qualquer um dos seus termos e então

$$d - L < d \leq u_n < d + L$$

ou seja,

$$\forall\, L > 0\, \exists\, p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow d - L < u_n < d + L,$$

isto é, $u_n \to d$. Então (u_n) é uma sucessão convergente para o infímo do conjunto dos seus termos. $\square$

Exemplo 3.7. Considere-se a sucessão de termo geral $u_n = \sqrt{n^2 - n}$ com $n > 1$.
Pretende-se mostrar que $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ tem limite finito.
Como $u_n = \sqrt{n^2 - n} > 0$ e $u_n < u_{n+1}$ vem que $\dfrac{1}{u_n} > \dfrac{1}{u_{n+1}}$.
Portanto, a sucessão de termo geral $\dfrac{1}{u_n}$, definida para $n > 1$, é monótona decrescente. Como $n^2 - n \geq 2, \forall n > 1$, assim $n(n-1) \geq 2$, pois $n \geq 2$ e $n - 1 \geq 1$, donde $\dfrac{1}{\sqrt{n^2 - n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, e consequentemente

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 - n}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

para todo o número natural $n > 1$, o que permite concluir que a sucessão é limitada.
Sendo monótona e limitada, pelo teorema 3.6, a sucessão converge, ou seja, tem limite finito.

Observação 3.5. O teorema 3.6 diz que uma sucessão monótona e limitada é convergente, contudo existem sucessões monótonas divergentes e sucessões limitadas também divergentes. Observe-se ainda que existem sucessões convergentes que não são monótonas.

- Uma sucessão monótona pode não ser convergente: por exemplo

$$n^2; \ \sqrt{n}; \ -3n; \ldots$$

são termos gerais de sucessões que são monótonas mas não são convergentes.

- Uma sucessão limitada pode não ser convergente: por exemplo a sucessão de termo geral

$$u_n = (-1)^n + 3$$

é limitada e não é convergente; é uma sucessão oscilante.

- Uma sucessão convergente pode não ser monótona: por exemplo a sucessão de termo geral

$$u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3$$

é convergente e não é monótona.

Teorema 3.7. *Sejam* (u_n) *e* (v_n) *duas sucessões convergentes. Se a partir de certa ordem se verifica* $u_n \leq v_n$ *então* $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Demonstração. Considerem-se (u_n) e (v_n) duas sucessões convergentes tais que, (u_n) converge para a e (v_n) converge para b.
Assim, por definição de convergência, tem-se que qualquer que seja $\delta > 0$, existe uma ordem $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq p_0$ verifica-se que $|u_n - a| < \delta$. e existe uma ordem $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq p_1$ verifica-se que $|v_n - b| < \delta$.
Considere-se p_2 a ordem a partir da qual se verifica $u_n \leq v_n$.
Suponha-se, com vista a uma contradição, que $a > b$ e considere-se $\delta = \dfrac{a-b}{2} > 0$. Seja $p = \max\{p_0, p_1, p_2\}$. Então para $n \geq p$ vem que,

$$-\delta < v_n - b < \delta \quad \text{e} \quad -\delta < u_n - a < \delta,$$

ou seja,

$$v_n - b < \frac{a-b}{2} \quad \text{e} \quad u_n - a > -\frac{a-b}{2}.$$

Assim,

$$v_n - b < \frac{a-b}{2} \Leftrightarrow v_n < \frac{a-b}{2} + b \Leftrightarrow v_n < \frac{a+b}{2}.$$

Por outro lado,

$$u_n - a > -\frac{a-b}{2} \Leftrightarrow u_n > -\frac{a-b}{2} + a \Leftrightarrow u_n > \frac{a+b}{2}.$$

Daqui se conclui que

$$v_n < \frac{a+b}{2} < u_n.$$

Ora esta desigualdade contradiz o facto de a partir da ordem p se ter $u_n \leq v_n$. Logo, $a \leq b$, isto é, $\lim u_n \leq \lim v_n$.

□

Corolário 3.1. *Se a partir de certa ordem a sucessão convergente* (u_n) *verifica* $u_n \geq 0$ *então* $\lim u_n \geq 0$.

Os teoremas que se seguem relacionam as propriedades algébricas fundamentais com as noções de convergência e limite.

Teorema 3.8. *O produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada é um infinitésimo.*

Demonstração. Pretende-se provar que, se (u_n) é uma sucessão limitada e (v_n) um infinitésimo, então $lim(u_n \times v_n) = 0$.
Seja (u_n) uma sucessão limitada, assim, existe $L > 0$ tal que $|u_n| \leq L$ qualquer que seja o número natural n,

$$\exists\, L > 0 \,:\, |u_n| \leq L, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, como (v_n) é um infinitésimo, $v_n \longrightarrow 0$, então

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, p \in \mathbb{N} \,:\, n > p \Rightarrow |v_n| < \frac{\delta}{L}.$$

Assim, para $n > p$ vem:

$$|u_n \times v_n - 0| = |u_n| \times |v_n| \leq |v_n| \times L < \frac{\delta}{L} \times L = \delta.$$

Donde se conclui que $(u_n \times v_n)$ converge para zero, isto é, $(u_n \times v_n)$ é um infinitésimo.

□

Exemplo 3.8. Consider-se a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{\operatorname{sen}^2(n+1)}{2n+3}$.
Pretende-se mostrar, usando o Teorema 3.8, que (u_n) converge para zero.

A sucessão de termo geral $\text{sen}^2(n+1)$ é limitada, pois $0 \leq \text{sen}^2(n+1) \leq 1$, qualquer que seja o número natural n.

Pelo Teorema 3.8, a sucessão de termo geral

$$u_n = \frac{\text{sen}^2(n+1)}{2n+3} = \text{sen}^2(n+1) \times \frac{1}{2n+3},$$

converge para zero, uma vez que é o produto do infinitésimo $\left(\frac{1}{2n+3}\right)$ pela sucessão limitada $\text{sen}^2(n+1)$. Logo a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{\text{sen}^2(n+1)}{2n+3}$ converge para zero.

Teorema 3.9. *Sejam (a_n) e (u_n) duas sucessões convergentes. Então (a_n+u_n) é uma sucessão convergente e* $\lim(a_n+u_n) = \lim a_n + \lim u_n$.

Demonstração. Considerem-se as sucessões (a_n) e (u_n) tais que (a_n) converge para a e (u_n) converge para b. Por definição de convergência tem-se que, qualquer que seja $\delta > 0$ existe uma ordem $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq p_0$ tem-se que $|a_n - a| < \dfrac{\delta}{2}$ e existe uma ordem $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq p_1$ tem-se que $|u_n - b| < \dfrac{\delta}{2}$.

Considere-se $p = \max\{p_0, p_1\}$. Nestas condições para $n \geq p$ são válidas as duas proposições

$$\forall \delta > 0 \; \exists p_0 \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\delta}{2}$$

$$\forall \delta > 0 \; \exists p_1 \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |u_n - b| < \frac{\delta}{2}$$

e

$$|(a_n+u_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (u_n - b)| \leq |a_n - a| + |u_n - b| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Donde se conclui que $\lim(a_n+u_n) = a + b = \lim a_n + \lim u_n$. □

Como consequência do Teorama 3.9 vem que: Se (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes, então: $\lim(u_n - v_n) = \lim u_n - \lim v_n$. Basta atender a que $u_n - v_n = u_n + (-1) \times v_n$.

Observação 3.6.

1. A soma de duas sucessões divergentes pode não ser divergente, por exemplo, considerem-se as sucessões de termo geral $u_n = -n$ (é um infinitamente grande negativo) e $v_n = \dfrac{n^3+5}{n^2}$

(é um infinitamente grande positivo). A sucessão soma é dada por

$$u_n + v_n = -n + \frac{n^3+5}{n^2} = \frac{-n^3+n^3+5}{n^2} = \frac{5}{n^2}.$$

A sucessão $\left(\frac{5}{n^2}\right)$ é um infinitésimo, logo convergente.

2. A soma de uma sucessão convergente com uma sucessão divergente é sempre divergente.

   Sejam (u_n) divergente e (v_n) convergente com limite $l \in \mathbb{R}$.

   Suponhamos que a sucessão $(u_n + v_n)$ converge para $s \in \mathbb{R}$. Então, a sucessão de termo geral u_n teria que convergir, já que seria a diferença de duas sucessões convergentes, (v_n) e $(u_n + v_n)$:

   $$u_n = u_n + v_n - v_n$$

   Por exemplo, considerem-se as sucessões de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$ (é um infinitésimo) e $v_n = \sqrt{n}$ (é um infinitamente grande positivo). A sucessão soma é dada por

   $$u_n + v_n = \frac{1}{n} + \sqrt{n},$$

   que é um infinitamente grande positivo, logo divergente.

Teorema 3.10. *Sejam (a_n) e (u_n) duas sucessões convergentes, então $(a_n \times u_n)$ é uma sucessão convergente e* $\lim(a_n \times u_n) = \lim\, a_n \times \lim\, u_n$.

Demonstração. Considerem-se as sucessões (a_n) e (u_n) tais que (a_n) converge para a e (u_n) converge para b. Por definição de convergência tem-se que, qualquer que seja $\delta > 0$ existe uma ordem $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq p_0$ tem-se que $|a_n - a| < \frac{\delta}{2}$, e existe uma ordem $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq p_1$ tem-se que $|u_n - b| < \frac{\delta}{2}$.
Note-se que $(a_n \times u_n) - (a \times b) = a_n u_n - a_n b + a_n b - ab = a_n(u_n - b) + (a_n - a)b$.
Como as sucessões (a_n) e (u_n) são limitadas (pois são convergentes), e $u_n - b$ e $a_n - a$ são infinitésimos, vem pelo teorema 3.8,

$$\lim((a_n \times u_n) - (a \times b)) = \lim(a_n(u_n - b)) + \lim((a_n - a)b) = 0$$

Pelo que $\lim(a_n \times u_n) = \lim a_n \times \lim u_n$.

$\square$

Exemplo 3.9. Sabendo que $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ e $v_n = \dfrac{3n+1}{n}$, pretende-se calcular o $\lim(u_n \times v_n)$. Visto que

$$\lim u_n = \lim\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \lim 2 - \lim \frac{1}{n} = 2 - 0 = 2$$

e

$$\lim a_n = \lim\left(\frac{3n+1}{n}\right) = \lim\left(3 + \frac{1}{n}\right) = \lim 3 + \lim \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3,$$

conclui-se que (u_n) e (a_n) são sucessões convergentes. Aplicando o Teorema 3.10 tem-se que: $\lim(u_n \times v_n) = \lim u_n \times \lim v_n = 2 \times 3 = 6$.

Os teoremas sobre limites aplicam-se a sucessões convergentes, contudo se as sucessões envolvidas forem divergentes as conclusões não são as mesmas.

Observação 3.7.

1. O produto de duas sucessões divergentes pode ser divergente ou convergente. Por exemplo, considerem-se as sucessões de termo geral $u_n = -n$ (é um infinitamente grande negativo) e $v_n = \dfrac{n^3+5}{n^2}$ (é um infinitamente grande positivo). A sucessão produto é dada por $u_n \times v_n = -n \times \left(\dfrac{n^3+5}{n^2}\right) = \dfrac{-n^3+5}{n}$.

   A sucessão $\dfrac{-n^3+5}{n}$ é um infinitamente grande negativo, logo divergente.

   Considerem-se agora as sucessões $u_n = (-1)^n$ e $v_n = (-1)^{n+1}$, são sucessões divergentes, no entanto $u_n \times v_n = (-1)^n \times (-1)^{n+1} = -1$ é convergente.

2. O produto de uma sucessão convergente com uma sucessão divergente pode ser convergente ou divergente. Por exemplo, considerem-se as sucessões de termo geral $u_n = \dfrac{1}{3n+1}$ (é um infinitésimo) e $v_n = 2n$ (é um infinitamente grande positivo).

   A sucessão produto é dada por $u_n \times v_n = \left(\dfrac{1}{3n+1}\right) \times (2n) = \dfrac{2n}{3n+1}$ a qual converge para $\dfrac{2}{3}$.

   Por outro lado, considerando as sucessões de termos gerais $(-1)^n v_n$ e u_n, a sucessão definida por $w_n = (-1)^n v_n u_n$ é uma sucessão divergente, pois a subsucessão dos termos de ordem par converge para $\frac{2}{3}$, e a subsucessão dos termos de ordem ímpar converge para $-\frac{2}{3}$.

Como consequência do Teorema 3.10 tem-se:

Corolário 3.2. *Seja (u_n) uma sucessão convergente então $(k \times u_n)$ é uma sucessão convergente e $\lim(k \times u_n) = k \times \lim u_n$, com k constante.*

Demonstração. É um caso particular do Teorema 3.10 em que (a_n) é a sucessão constante.

□

Teorema 3.11. *Sejam (a_n) e (u_n) duas sucessões convergentes, então $\left(\frac{a_n}{u_n}\right)$ é uma sucessão convergente desde que $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim u_n \neq 0$. Nesse caso*

$$\lim \left(\frac{a_n}{u_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim u_n}.$$

Demonstração. Considerem-se as sucessões (a_n) e (u_n) tais que (a_n) converge para a e (u_n) converge para $b \neq 0$. Por definição de convergência temos que, dado $\delta > 0$ existe uma ordem $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq p_0$ tem-se que $|a_n - a| < \frac{\delta}{2}$, e existe uma ordem $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq p_1$ tem-se que $|u_n - b| < \frac{\delta}{2}$.
Como (u_n) converge para b, e $b \neq 0$, tem-se que $u_n \times b$ converge para b^2 e $b^2 > 0$, ou seja

$$-\delta < u_n \times b - b^2 < \delta.$$

Escolha-se $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que existe uma ordem $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geq p_2$ tem-se $u_n \times b > b^2 - \delta > 0$.
Assim, considerando apenas os termos cuja ordem é maior que p_2 (os que não o forem são em número finito), obtém-se:

$$0 < \frac{1}{u_n \times b} < \frac{1}{b^2 - \delta},$$

pelo que a sucessão $\left(\frac{1}{u_n \times b}\right)$ é limitada.

Note-se que se tem

$$\frac{a_n}{u_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n b - u_n a}{u_n b} = (a_n b - u_n a) \times \frac{1}{u_n b},$$

e como

$$\lim(a_n b - u_n a) = \lim(a_n b) + \lim(-u_n a) = ab + (-ab) = 0,$$

e $\lim\left(\frac{a_n}{u_n} - \frac{a}{b}\right) = \lim\left(\frac{a_n b - u_n a}{u_n b}\right) = \lim\left((a_n b - u_n a) \times \frac{1}{u_n b}\right)$, pelo teorema 3.8

$$\lim\left((a_n b - u_n a) \times \frac{1}{u_n b}\right) = 0,$$

o que permite concluir que

$$\lim \frac{a_n}{u_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim a_n}{\lim u_n}.$$

□

Exemplo 3.10. Sabendo que $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ e $v_n = \frac{3n+1}{n}$, pretende-se calcular o $\lim \frac{u_n}{v_n}$. Visto que $\lim u_n = 2$ e $\lim v_n = 3$, como verificado no Exemplo 3.9, (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes e $v_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\lim v_n \neq 0$. Aplicando o Teorema 3.11 tem-se que:

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = \frac{2}{3}.$$

Observação 3.8.

1. O quociente de duas sucessões divergentes pode ser convergente ou divergente. Por exemplo, considerem-se as sucessões de termo geral $u_n = n^2$ (é um infinitamente grande positivo) e $v_n = n$ (é um infinitamente grande positivo). A sucessão quociente é dada por

   $$\frac{v_n}{u_n} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n},$$

   a qual converge para zero. Contudo, no caso de se considerar

   $$\frac{u_n}{v_n} = \frac{n^2}{n} = n$$

   tem-se $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

2. O quociente de uma sucessão convergente com uma sucessão divergente pode ser divergente ou convergente, por exemplo, considerem-se as sucessões de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n}$ (é um infinitésimo) e $v_n = n^2$ (é um infinitamente grande positivo). A sucessão quociente é dada por
$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{n^2}{\dfrac{1}{n}} = n^3,$$
que é um infinitamente grande positivo. Caso se considere
$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{n}}{n^3} = \frac{1}{n^3},$$
tem-se $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Teorema 3.12. *Seja (u_n) uma sucessão convergente. Então para todo o $p \in \mathbb{Z}$, a sucessão $(u_n)^p$ converge desde que $(u_n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ nos casos em que $p < 0$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sucessão convergente para a. Nestas condições, qualquer que seja $\delta > 0$ existe uma ordem $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq p_0$ verifica-se que $|u_n - a| < \delta$.

- Se $p = 0$ então $(u_n)^p = 1$ e $\lim(u_n)^p = \lim\ 1 = 1 = (\lim\ u_n)^p$.
- Se $p \in \mathbb{N}$, vem que $\lim(u_n)^p = \lim(u_n \times u_n \times \ldots \times u_n)$, p factores e, pelo Teorema 3.10, vem $\lim u_n \times \lim u_n \times \ldots \times \lim u_n = (\lim u_n)^p$.
- Se $p \in \mathbb{Z}^-$, faz-se $p = -k$, com $k \in \mathbb{N}$ e para $u_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, aplicando os Teoremas 3.11 e 3.10 vem
$$\lim(u_n)^{-k} = \lim\left(\frac{1}{(u_n)^k}\right) = \frac{1}{\lim(u_n)^k} = \frac{1}{(\lim u_n)^k} = (\lim\ u_n)^{-k}.$$

□

Exemplo 3.11. Sejam $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ e $v_n = \dfrac{3n+1}{n}$. Pretende-se calcular o $\lim(u_n - 3v_n)^2$. Visto que $\lim u_n = 2$ e $\lim v_n = 3$ (ver Exemplo 3.9), (u_n) e (v_n) são sucessões convergentes. Aplicando os teoremas anteriores tem-se que:
$$[\lim(u_n - 3v_n)]^2 = [\lim u_n - 3 \lim v_n]^2 = (2 - 3 \times 3)^2 = 49.$$

Teorema 3.13. *Seja* (a_n) *uma sucessão convergente com* $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ *e* $p \in \mathbb{N}$. *Então* $(\sqrt[p]{a_n})$ *é uma sucessão convergente, e* $\lim \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{\lim a_n}$.

Demonstração. Comece-se por provar por indução em p, que a relação

$$u^p - v^p = (u-v)(u^{p-1} + u^{p-2}v + u^{p-3}v^2 + \ldots + uv^{p-2} + v^{p-1}) \tag{3.15}$$

é válida para quaisquer u e v números reais.

- Para $n = 1$

  $u - v = u - v$, verdade.

- Hipótese: $u^p - v^p = (u-v)(u^{p-1} + u^{p-2}v + u^{p-3}v^2 + \ldots + uv^{p-2} + v^{p-1})$

  Tese: $u^{k+1} - v^{k+1} = (u^{k+1} - uv^k) + (uv^k - v^{k+1}) = u(u^k - v^k) + v^k(u-v)$

  Atendendo a (3.15) resulta

$$\begin{aligned} u^{k+1} - v^{k+1} &= u(u^k - v^k) + v^k(u-v) \\ &= u\left[(u-v)(u^{k-1} + u^{k-2}v + \ldots + uv^{k-2} + v^{k-1})\right] + v^k(u-v) \\ &= (u-v)(u^k + u^{k-1}v + \ldots + u^2v^{k-2} + uv^{k-1}) + v^k(u-v) \\ &= (u-v)(u^k + u^{k-1}v + \ldots + u^2v^{k-2} + uv^{k-1} + v^k) \end{aligned}$$

Fica assim provado, pelo princípio de indução matemática, que

$$u^p - v^p = (u-v)(u^{p-1} + u^{p-2}v + u^{p-3}v^2 + \ldots + uv^{p-2} + v^{p-1}),$$

quaisquer se sejam u e v números reais.

Considere-se $a > 0$, $u = \sqrt[p]{a_n}$ e $v = \sqrt[p]{a}$, obtém-se

$$a_n - a = (\sqrt[p]{a_n})^p - (\sqrt[p]{a})^p = (\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a})[(\sqrt[p]{a_n})^{p-1} + \ldots + \sqrt[p]{a_n}(\sqrt[p]{a})^{p-2} + (\sqrt[p]{a})]^{p-1}$$

e

$$\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a} = \frac{a_n - a}{(\sqrt[p]{a_n})^{p-1} + \ldots + \sqrt[p]{a_n}(\sqrt[p]{a})^{p-2} + (\sqrt[p]{a})^{p-1}}.$$

Assim

$$|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| = \frac{|a_n - a|}{|(\sqrt[p]{a_n})^{p-1} + \ldots + (\sqrt[p]{a})^{p-1}|} \leq \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}},$$

pois as parcelas do denominador são todas positivas e

$$(\sqrt[p]{a_n})^{p-1} + \ldots + (\sqrt[p]{a})^{p-1} \geq (\sqrt[p]{a})^{p-1}.$$

Como (a_n) converge para a, tem-se que qualquer que seja $\delta > 0$ existe uma ordem $p_0 \in \mathbb{N}$, tal que para $n > p_0$ tem-se que $|a_n - a| < \delta(\sqrt[p]{a})^{p-1}$. Assim

$$|\sqrt[p]{a}_n - \sqrt[p]{a}| \leq \frac{|a_n - a|}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}} < \frac{\delta(\sqrt[p]{a})^{p-1}}{(\sqrt[p]{a})^{p-1}} = \delta.$$

Se $a = 0$ então o $\lim a_n = 0$ e, neste caso, considera-se na definição de limite $|a_n| < \delta^p$ e $a_n < \delta^p$, pois $a_n \geq 0$. Neste caso, $|\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| = |\sqrt[p]{a_n}| = \sqrt[p]{a_n} \leq \sqrt[p]{\delta^p} = \delta$ □

Nota 3.2. Se p for ímpar e $a_n < 0$ o Teorema 3.13 permanece válido.

Exemplo 3.12. Calcular o $\lim \sqrt[5]{\dfrac{32n+1}{n}}$.

Como a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{32n+1}{n}$ é convergente, (o limite é 32), aplicando o Teorema 3.13 tem-se:

$$\lim \sqrt[5]{\frac{32n+1}{n}} = \sqrt[5]{\lim \frac{32n+1}{n}} = \sqrt[5]{\lim \left(32 + \frac{1}{n}\right)} = \sqrt[5]{32} = 2$$

A sucessão dada converge para 2.

Teorema 3.14. *(Teorema das sucessões enquadradas):*

Sejam (u_n), (v_n) e (w_n) sucessões convergentes e a um número real tais que:

- $\lim u_n = \lim v_n = a$;
- *a partir de uma certa ordem p tem-se $u_n \leq w_n \leq v_n$, $\forall\, n \geq p$.*

Então $\lim w_n = a$.

Demonstração. Considerem-se duas sucessões (u_n) e (v_n) convergentes para $a \in \mathbb{R}$.

Então, qualquer que seja $\delta > 0$ existem p_0 e p_1 naturais, tais que para $n \geq p_0$ se tem $a - \delta < u_n < a + \delta$ e para $n \geq p_1$ se verifica que $a - \delta < v_n < a + \delta$.
Seja p_2 a ordem a partir da qual se tem $u_n \leq w_n \leq v_n$ e defina-se $p = \max\{p_0, p_1, p_2\}$. Nestas condições para $n \geq p$ vem que

$$a - \delta < u_n \leq w_n \leq v_n < a + \delta,$$

ou seja,

$$a - \delta < w_n < a + \delta,$$

pelo que $\lim w_n = a$. □

Exemplo 3.13. Considere-se a sucessão de termo geral

$$v_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}.$$

Embora todas as parcelas desta soma tendam para zero, vai-se mostrar, recorrendo ao teorema das sucessões enquadradas, que (v_n) converge para um.
Facilmente se verifica que $v_n \geq 0$, qualquer que seja o número natural n, e

$$\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} = \frac{n \times n}{n^2+1}.$$

Ou seja, $v_n \leq \dfrac{n \times n}{n^2+1} = \dfrac{n^2}{n^2+1}$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} &\geq \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \\ &= n \times \frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Isto é, $v_n \geq \dfrac{n}{n+1}$.
Portanto,

$$\frac{n}{n+1} \leq v_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Como,

$$\lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} = 1$$

e

$$\lim \frac{n^2}{n^2+1} = \lim \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = 1,$$

pelo Teorema 3.14 conclui-se que

$$\lim v_n = \lim \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} \right) = 1.$$

Observação 3.9. Convém observar que para calcular o limite da sucessão de termo geral

$$v_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

não é possível aplicar as propriedades operatórias dos limites, visto estas serem válidas apenas quando há um número finito de parcelas, o que não acontece neste caso.

3.7.3 Exercícios

Com os exercícios seguintes pretende-se explorar os resultados apresentados na subsecção anterior.

Exercício 1:

Neste exercício pretende-se calcular o limite de uma sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{an-b}{n}$ com a e b parâmetros reais.

Resolução:

Como

$$\frac{an-b}{n} = \frac{an}{n} - \frac{b}{n} = a - \frac{b}{n},$$

vem,

$$\lim\left(\frac{an-b}{n}\right) = \lim\left(a-\frac{b}{n}\right) = \lim a - \lim\frac{b}{n} = a - \lim\frac{b}{n}.$$

Uma vez que $\frac{b}{n}$ é um infinitésimo, ou seja

$$\lim\frac{b}{n} = 0,$$

resulta

$$\lim\left(\frac{an-b}{n}\right) = a - \lim\frac{b}{n} = a$$

A resposta é, $\lim u_n = a$.

Para programar este exercício consideraram-se as seguintes opções de resposta:

correta1 $\lim u_n = a$

errada1 $\lim u_n = b$

errada2 $\lim u_n = 0$

errada3 $\lim u_n = +\infty$

Sendo que a primeira é a correta e as restantes são falsas.

As escolhas têm que ser todas distintas. Nestas escolhas de resposta só ocorre igualdade quando $a = b$, e nesta situação define-se $b := \frac{a}{2}$.

A escolha dos parâmetros para programação do exercício foi:

$$a,\, b\, \in\, \{-10, \ldots, 10\} \setminus \{0\}.$$

Para concretização do exercício considere-se a sucessão definida por $u_n = \frac{2n+3}{n}$ pretende-se mostrar que é convergente para 2, ou seja, o limite da sucessão é 2.

$u_n - 2 = \frac{2n+3}{n} - 2 = \frac{2n+3-2n}{n} = \frac{3}{n}$. Ora, $\left(\frac{3}{n}\right)$ é um infinitésimo, portanto a sucessão dada converge para 2.

Exercício 2

Com o exercício seguinte pretende-se calcular o limite de uma sucessão com termo geral

$$u_n = \frac{1}{an+b},\ a \neq 0.$$

Resolução:

Por definição de limite vem:

$$\forall\, \delta > 0\,, \exists\, p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |u_n - 0| < \delta.$$

Seja $\delta > 0$ logo,

$$|u_n - 0| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{1}{an+b}\right| < \delta \Leftrightarrow |an+b| > \frac{1}{\delta}.$$

Logo,

$$|a|\left|n + \frac{b}{a}\right| > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow \left|n + \frac{b}{a}\right| > \frac{1}{|a|\delta}.$$

Assim,

$$\frac{1}{|a|\delta} < \left|n + \frac{b}{a}\right| \leq n + \left|\frac{b}{a}\right|.$$

Donde resulta que para

$$\frac{1}{|a|\delta} - \left|\frac{b}{a}\right| \leq n$$

verifica-se $\left|\dfrac{1}{an+b}\right| < \delta.$

Assim, tomando $p = \max\left\{1, \left[\dfrac{1}{|a|+\delta} - \dfrac{b}{a}\right] + 1\right\}$, tem-se para $n \geq p$, que

$$\left|\frac{1}{an+b} - 0\right| < \delta$$

ficando assim provado que $\lim(u_n) = 0$.

A resposta correta é $\lim(u_n) = 0$.
Para programação do exercício no formato de escolha múltipla, consideraram-se as seguintes opções de resposta:

correta1 (u_n) *converge para* 0.

errada1 (u_n) *converge para* a.

errada2 (u_n) *converge para* b.

errada3 (u_n) não é convergente.

Para garantir que todas as opções de resposta são distintas é necessário que $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a \neq b$. Assim, escolheu-se para domínio dos parâmetros o conjunto

$$a,\, b \in \{-10, \ldots, 10\} \setminus \{0\}$$

sendo que, se $a = b$ faz-se $a := 2b$.

Exercício 3

Com o exercício seguinte pretende-se, dado o termo geral de duas sucessões, calcular o limite da soma das sucessões dadas.
Considerem-se as sucessões de termo geral

$$u_n = \frac{a_1 n^p - b_1}{n^p} \quad \text{e} \quad v_n = \frac{a_2}{b_2 n + c},$$

com $a_1\,, a_2\,, b_1\,, b_2\,, c \in \{1, \ldots, 20\}$ e $p \in \{2, \ldots, 10\}$.
Resolução:
Começa por calcular-se o $\lim u_n$.
Como

$$u_n = \frac{a_1 n^p - b_1}{n^p} = \frac{a_1 n^p}{n^p} - \frac{b_1}{n^p} = a_1 - \frac{b_1}{n^p},$$

conclui-se que

$$\lim u_n = \lim \left(a_1 - \frac{b_1}{n^p} \right) = \lim a_1 - \lim \frac{b_1}{n^p} = a_1 - 0 = a_1.$$

Em seguida, calcule-se o limite de v_n,

$$\lim v_n = \lim \frac{a_2}{b_2 n + c}$$

Repare-se que (v_n) é a restrição a $\mathbb{N}$ da função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{a_2}{b_2 x + c}$.
A função f assim definida é uma função racional cujo gráfico é uma hipérbole de assíntotas $x = -\dfrac{c}{b_2}$ e $y = 0$.
Uma vez que $f(x) \longrightarrow 0$ quando $x \longrightarrow +\infty$, conclui-se que $\lim v_n = \lim \dfrac{a_2}{b_2 n + c} = 0$.
Atendendo a que $\lim u_n = a_1$ e $\lim v_n = 0$, então

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = a_1 + 0 = a_1$$

A resposta correta é, $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = a_1$.
Consideraram-se as escolhas múltiplas:

correta1 $\lim(u_n + v_n) = a_1$

errada1 $\lim(u_n + v_n) = \dfrac{a_1}{b_2}$

errada2 $\lim(u_n + v_n) = \dfrac{a_1}{c}$

errada3 $\lim(u_n + v_n) = 0$

A errada3 será sempre diferente das outras escolhas, uma vez que no domínio escolhido os parâmetros não tomam o valor 0.
Para que correta1 seja diferente de errada1 e correta1 seja diferente de errada2, basta que $b_2 \neq 1$ e $c \neq 1$.
Uma vez que $x = \dfrac{x}{y}$ quando $xy = x \Leftrightarrow x(y-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 1$.
errada1=errada2 quando $b_2 = c$, e nesse caso, tome-se para errada2= $\dfrac{a_1}{b_2 + 1}$.
A escolha dos parâmetros definitiva é:

$$a_1\,, a_2\,, b_1 \in \{1, \ldots, 20\}, \quad b_2\,, c \in \{2, \ldots, 20\} \quad \text{e} \quad p \in \{2, \ldots, 10\}.$$

Exercício 4

Com este exercício explora-se o cálculo do limite de uma sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n^p - a}{n^{p-1} + b}$.
Resolução: Para calcular o limite da sucessão reescreve-se a expressão do seu termo geral:

$$\frac{n^p - a}{n^{p-1} + b} = \frac{n^{p-1}\left(n - \dfrac{a}{n^{p-1}}\right)}{n^{p-1}\left(1 + \dfrac{b}{n^{p-1}}\right)} = \frac{n - \dfrac{a}{n^{p-1}}}{1 + \dfrac{b}{n^{p-1}}}.$$

Como $\dfrac{a}{n^{p-1}} \longrightarrow 0$ e $\dfrac{b}{n^{p-1}} \longrightarrow 0$, então $\lim \dfrac{n^p - a}{n^{p-1} + b} = +\infty$.
A resposta correta será $\lim u_n = +\infty$.

foram selecionadas as seguintes opções de resposta:

correta1 $\lim u_n = +\infty$

errada1 $\lim u_n = 0$

errada2 $\lim u_n = a$

errada3 $\lim u_n = \dfrac{a}{b}$

Nestas escolhas de resposta só ocorre igualdade quando:

i. $a = 0$.

ii. $\dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$ com $b \neq 0$.

iii. $\dfrac{a}{b} = a \Leftrightarrow ab = a$ com $b \neq 0 \Leftrightarrow ab - a = 0 \Leftrightarrow a(b-1) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 1$.

Atendendo a estes casos a seleção dos parâmetros será:

$$a \in \{-10, \ldots, 10\} \setminus \{0\} \quad b \in, \{-10, \ldots, 10\} \setminus \{0, 1\} \quad p \in \{1, \ldots, 20\}$$

Exercício 5

Neste exercício considera-se a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{n^{p-1} + a}{n^p}$ em que a é um número inteiro e p é um número natural, com o objetivo de calcular o seu limite.
Resolução:

Como

$$\frac{n^{p-1}+a}{n^p} = \frac{n^{p-1}}{n^p} + \frac{a}{n^p} = \frac{1}{n} + \frac{a}{n^p},$$

considere-se $a_n = \dfrac{1}{n}$ e $v_n = \dfrac{a}{n^p}$.

Como $\lim a_n = 0$ e $\lim v_n = 0$, e $u_n = a_n + v_n$, vem que $\lim u_n = \lim a_n + \lim v_n = 0 + 0 = 0$.

A resposta correta será $\lim u_n = 0$.

Para escolhas múltiplas considerem-se as seguintes opções:

correta1 $\lim u_n = 0$

errada1 $\lim u_n = a$

errada2 $\lim u_n = +\infty$

errada3 $\lim u_n = -a$

A igualdade entre resposta acontece apenas quando $a = 0$. Assim, a escolha dos parâmetros será:

$$a \in \{-10, \ldots, 10\} \setminus \{0\} \quad p \in \{1, \ldots, 20\}$$

Com os exercícios que se seguem pretende-se utilizar o Teorema das sucessões enquadradas para calcular o limite de uma sucessão.

Exercício 6

Calcular o limite da sucessão de termo geral

$$u_n = \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha n)}{an+b},$$

em que a e b são números naturais e α real.

Resolução:

Como $-1 \leq \operatorname{sen}(\alpha n) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ então, $\operatorname{sen}^2(\alpha n)$ só toma valores entre 0 e 1,

$$0 \leq \operatorname{sen}^2(\alpha n) \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha n)}{an+b} \leq \frac{1}{an+b}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Como $\lim 0 = 0$ e $\lim \dfrac{1}{an+b} = 0$, conclui-se que $\lim \dfrac{\operatorname{sen}^2(\alpha n)}{an+b} = 0$.
Consideram-se as seguintes opções de resposta:

correta1 $\lim u_n = 0$

errada1 $\lim u_n = +\infty$

errada2 $\lim u_n = \dfrac{1}{a}$

errada3 $\lim u_n = \dfrac{1}{a+b}$

Uma vez que a e b são números naturais nunca duas destas respostas são iguais. Pelo que a escolha dos parâmetros é

$$a,\, b \in \{1, \ldots, 20\}.$$

Exercício 7

Determine-se o limite da sucessão de termo geral

$$v_n = \frac{an - \cos(\alpha n)}{bn}$$

em que a e b são números naturais.

Resolução:

Como

$$-1 \leq \cos(\alpha n) \leq 1\,, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

Donde,

$$\frac{an-1}{bn} \leq \frac{an - \cos(\alpha n)}{bn} \leq \frac{an+1}{bn}\,, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\frac{an-1}{bn} \longrightarrow \frac{a}{b}$$

e

$$\frac{an+1}{bn} \longrightarrow \frac{a}{b}$$

Conclui-se que

$$v_n \longrightarrow \frac{a}{b},$$

ou seja,

$$\lim \frac{an - \cos(\alpha n)}{bn} = \frac{a}{b}.$$

As opções de resposta escolhidas foram:

correta1 $\lim v_n = \dfrac{a}{b}$

errada1 $\lim v_n = +\infty$

errada2 $\lim v_n = 0$

errada3 $\lim v_n = a$

Para que as várias opções de resposta sejam distintas, e escolhendo $a \neq 0$ e $b \neq 0$, tal situação apenas acontece se:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = a \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a-ab}{b} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a(1-b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a = 0 \ \vee \ 1-b = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a = 0 \ \vee \ b = 1. \end{aligned}$$

Assim, a escolha dos parâmetros é:

$$a \in \{1, \ldots, 20\} \text{ e } b \in \{2, \ldots, 20\}.$$

Uma concretização pode ser neste caso $v_n = \dfrac{3n - \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)}{2n}$ onde $\lim v_n = \dfrac{3}{2}$.

3.8 Propriedades dos limites infinitos

Teorema 3.15. *Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões tais que (u_n) é um infinitamente grande positivo e, a partir de certa ordem, $u_n \leq v_n$. Então (v_n) é um infinitamente grande positivo.*

Demonstração. Hipótese: (u_n) é um infinitamente grande positivo e existe p_1 tal que se $n \geq p_1$ então $v_n \geq u_n$.
Tese: (v_n) é um infinitamente grande positivo.
Como (u_n) é um infinitamente grande positivo dado qualquer número real L, sabe-se que existe uma ordem p_2 tal que se $n \geq p_2$, então $u_n > L$.
Por outro lado, sabe-se que a partir da ordem p_1 tem-se que $v_n \geq u_n$.
Considere-se $p = \max\{p_1, p_2\}$. Então a partir da ordem p tem-se que $v_n \geq u_n$ e $u_n > L$, ou seja, a partir da ordem p verifica-se que $v_n \geq u_n > L$, o que permite concluir que (v_n) é um infinitamente grande positivo. □

Teorema 3.16. *Se (u_n) é um infinitamente grande negativo e se, a partir de certa ordem, $v_n \leq u_n$ então (v_n) é um infinitamente grande negativo.*

Mostra-se de modo análogo ao teorema anterior.

Teorema 3.17. *Se (u_n) é um infinitamente grande positivo (resp. negativo) então $(u_n + k)$ é um infinitamente grande positivo (resp. negativo) qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $k \geq 0$ vem que $u_n + k \geq u_n$, logo $(u_n + k)$ é um infinitamente grande positivo.
Se $k < 0$, como por hipótese (u_n) é um infinitamente grande positivo, para qualquer número real L, existe uma ordem p tal que $n >$, então $u_n > L$. Logo, dado $(L - k) \in \mathbb{R}$, existe uma ordem p a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores do que $(L - k)$, assim, $u_n > L - k \Leftrightarrow u_n + k > L$, logo, $(u_n + k)$ é um infinitamente grande positivo.
A demonstração para infinitamente grande negativo é semelhante, pelo que é omitida. □

Teorema 3.18. *Se (u_n) é um infinitamente grande positivo e $k \in \mathbb{R}^+$, então (ku_n) é um infinitamente grande positivo.*

Demonstração. Se $k \geq 1$, como (u_n) é um infinitamente grande positivo e $k\,u_n \geq u_n$, pelo Teorema 3.15, (ku_n) é um infinitamente grande positivo.
Se $0 < k < 1$, por hipótese (u_n) é um infinitamente grande positivo, logo dado $\dfrac{L}{k} \in \mathbb{R}$, existe uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores do que $\dfrac{L}{k}$.

$$u_n > \frac{L}{k} \Leftrightarrow ku_n > L,$$

portanto, (ku_n) é um infinitamente grande positivo. $\square$

Exemplo 3.14. Mostre-se que a sucessão de termo geral $u_n = \sqrt{n^2 + 2n}$ é um infinitamente grande positivo.

Tem-se que $\sqrt{n^2+2n} \geq \sqrt{n}^2$ para $n \geq 1$ e como $\sqrt{n}^2 = n \to +\infty$, então pelo resultado anterior conclui-se que $\sqrt{n^2+2n} \longrightarrow +\infty$. Logo a sucessão de termo geral $u_n = \sqrt{n^2+2n}$ é um infinitamente grande positivo.

Teorema 3.19. *Se (u_n) é um infinitésimo também (ku_n) é um infinitésimo qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $k \neq 0$. Se (u_n) é um infinitésimo, qualquer que seja $\delta > 0$, então $|u_n| < \dfrac{\delta}{|k|}$ a partir de certa ordem p.

Assim $|ku_n| < \delta$, a partir da mesma ordem p, ou seja, $\forall\, \delta > 0$ existe uma ordem a partir da qual se tem $|ku_n| < \delta$. Donde se conclui que (ku_n) é um infinitésimo.

Se $k = 0$, $ku_n = 0$ logo (ku_n) é um infinitésimo. $\square$

Exemplo 3.15. Mostrar que a sucessão de termo geral $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ é um infinitésimo.

Como

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \\ &= \frac{n - n + 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \end{aligned}$$

resulta que

$$\lim u_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = 0.$$

Provou-se assim que a sucessão (u_n) é um infinitésimo.

Teorema 3.20. *Sendo (u_n) uma sucessão de termos não nulos, tem-se que:*

1. *Se (u_n) é um infinitamente grande então $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ é um infinitésimo (isto é, o inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo).*

2. *Se (u_n) é um infinitésimo então $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ é um infinitamente grande em módulo (isto é, o inverso de um infinitésimo é um infinitamente grande).*

Demonstração.

1. Se (u_n) é um infinitamente grande, qualquer que seja $\delta > 0$ é possivel determinar uma ordem a partir da qual se tem que:

$$|u_n| > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow \frac{1}{|u_n|} < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| < \delta$$

o que significa que $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ é um infinitésimo.

2. Considere-se $u_n \neq 0$ qualquer que seja o número natural n e (u_n) um infinitésimo.

Qualquer que seja $L > 0$ existe uma ordem a partir da qual

$$|u_n| < \frac{1}{L} \Leftrightarrow \frac{1}{|u_n|} > L \Leftrightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| > L,$$

o que significa que $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ é um infinitamente grande.

□

Observação 3.10. Se (u_n) tende para zero por valores à direita de zero então $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ é um infinitamente grande positivo. Se (u_n) tende para zero por valores à esquerda de zero então $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ é um infinitamente grande negativo.

Teorema 3.21. *Dada a familia de sucessões (u_n) de termo geral $u_n = a^n$, com $a \in \mathbb{R}$.*

i. Se $|a| > 1$, (u_n) é um infinitamente grande em módulo (se $a > 1$ é um infinitamente grande positivo e se $a < -1$ é um infinitamente grande em módulo).

ii. Se $|a| < 1$, então (u_n) é um infinitésimo.

iii. Se $a = 1$, (u_n) é a sucessão constante cujos termos são todos iguais a 1.

iv. Se $a = -1$, a sucessão (u_n) é divergente oscilante.

Demonstração.

i. Pretende-se mostrar que se $|a| > 1$, a sucessão $|a^n| \longrightarrow +\infty$.

Considere-se $h = |a| - 1$. Como $h > 0$ e $|a| = 1 + h$, aplicando a fórmula do binómio de Newton, tem-se que:

$$|a|^n = (1+h)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n h^k. \tag{3.16}$$

Mas, como $h > 0$, os termos $C_k^n h^k$ são todos positivos. Logo, de (3.16) resulta:

$$|a|^n \geq 1 + nh, \, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

Considere-se L um número real qualquer. Ora, de (3.17), resulta:

$$1 + nh > L \Rightarrow |a|^n > L.$$

Mas

$$1 + nh > L \Leftrightarrow n > \frac{L-1}{h}.$$

Logo para

$$n > \frac{L-1}{h} \Rightarrow |a|^n > L.$$

Daqui conclui-se que

$$\forall L \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow |a|^n > L.$$

O que significa que $|a|^n \longrightarrow +\infty$.

ii. Suponha-se que $|a| < 1$. Então se se colocar $k = \dfrac{1}{|a|}$, vem $k = \dfrac{1}{|a|} > 1$ e portanto $k^n \longrightarrow \infty$ pelo ponto i deste teorema. Mas como $|a| = \dfrac{1}{k}$, donde

$$a^n = \left(\frac{1}{k}\right)^n = \frac{1}{k^n}$$

e portanto $|a|^n \longrightarrow 0$ (o inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo, pelo ponto 1 do Teorema 3.20). Portanto, a sucessão (a^n) é também um infinitésimo.

iii. Se $a = 1$, tem-se $1^n = 1$, qualquer que seja o número natural n e assim $a^n \longrightarrow 1$.

iv. Se $a = -1$, tem-se a sucessão $-1, 1, -1, 1, \ldots$, sucessão de termos alternados que não tem limite.

$\square$

Exemplos 3.7. Considerem-se as sucessões de termo geral $u_n = \dfrac{3^n}{2^n}$, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{5^n}$ e $w_n = (-3)^n$.

1. $u_n = \dfrac{3^n}{2^n} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

   Pelo Teorema 3.21 conclui-se qu (u_n) é um infinitamente grande positivo, já que $\dfrac{3}{2} > 1$.

2. $v_n = \dfrac{(-1)^n}{5^n} = \left(-\dfrac{1}{5}\right)^n$.

   Como $\left|-\dfrac{1}{5}\right| < 1$, pelo Teorema 3.21 conclui-se qu (v_n) é um infinitésimo.

3. A sucessão $w_n = (-3)^n$ toma valores alternadamente positivos e negativos. Mas como $|-3| > 1$, o Teorema 3.21 permite afirmar que esta sucessão é um infinitamente grande em módulo, mas (w_n) não é infinitamente grande negativo nem infinitamente grande positivo.

3.8.1 Propriedades operatórias dos limites infinitos

Teorema 3.22. *Sejam (u_n) e (v_n), duas sucessões.*

1. *Se (u_n) e (v_n) são infinitamente grandes positivos então $(u_n + v_n)$ é um infinitamente grande positivo;*

2. *Se (u_n) e (v_n) são infinitamente grande negativos então $(u_n + v_n)$ é um infinitamente grande negativo;*

3. *Se (u_n) é um infinitamente grande negativo (respetivamente infinitamente grande positivo) e (v_n) converge para a, com $a \in \mathbb{R}$ então $(u_n + v_n)$ é um infinitamente grande negativo (respetivamente infinitamente grande positivo);*

4. *Se (u_n) é um infinitamente grande em módulo e (v_n) converge para a, com $a \in \mathbb{R}$ então $(u_n + v_n)$ é um infinitamente grande em módulo;*

5. *Se (u_n) é um infinitamente grande negativo (respetivamente infinitamente grande positivo) e (v_n) converge para b, com $b \in \mathbb{R}^+$, então $(u_n \times v_n)$ é um infinitamente grande negativo (infinitamente grande positivo);*

6. *Se (u_n) é um infinitamente grande negativo (respetivamente infinitamente grande positivo) e (v_n) converge para c, com $c \in \mathbb{R}^-$, então $(u_n \times v_n)$ é um unfinitamente grande positivo (respetivamente infinitamente grande negativo);*

7. *Se (u_n) e (v_n) são infinitamente grandes então $(u_n \times v_n)$ é um infinitamente grande.*

Demonstração. 1. Considere-se que $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = +\infty$. Seja $L > 0$, existem $p_1 \in \mathbb{N}$ e $p_2 \in \mathbb{N}$, tais que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq p_1 \Rightarrow u_n > \frac{L}{2}$$

e

$$n \geq p_2 \Rightarrow v_n > \frac{L}{2}.$$

Considerando $p = \max\{p_1, p_2\}$, tem-se, para todo o número natural $n \geq p$,

$$u_n + v_n > L.$$

Donde se conclui que

$$\lim(u_n + v_n) = +\infty.$$

2. Demonstração análoga à anterior. Note-se que, se $\lim u_n = -\infty$, então $\lim(-u_n) = +\infty$.

3. Suponha-se que $\lim u_n = +\infty$ e $\lim v_n = a$, com $a \in \mathbb{R}$.
Sejam $L > 0$ e $\delta > 0$. Como $\lim v_n = a$, existe $p_1 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo o número natural $n \geq p_1$, se tem $|v_n - a| < \delta$ ou seja,

$$a - \delta < v_n < a + \delta.$$

Em particular, para $n \geq p_1$,

$$v_n > a - \delta.$$

Por outro lado, como lim $u_n = +\infty$, existe $p_2 \in \mathbb{N}$, tal que , para todo o número natural $n \geq p_2$, tem-se

$$u_n > L - a + \delta.$$

Considere-se $p = \max\{p_1, p_2\}$. Então, para todo o número natural $n \geq p$, tem-se

$$u_n + v_n > L - a + \delta + a - \delta = L.$$

Portanto, para cada $L > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$u_n + v_n > L, \ \forall n \geq p$$

o que significa que $\lim(u_n + v_n) = +\infty$.

4. Prova-se de modo análogo ao anterior, considerando a sucessão $(|u_n|)_n$.

5. Como lim $v_n = b$, e $b > 0$, considere-se, sem perda de generalidade, um qualquer $a \in]0, b[$. Para cada a, existe $p_1 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo o número natural $n \geq p_1$, se tem

$$|v_n - b| < b - a.$$

Como

$$|v_n - b| < b - a \Leftrightarrow -b + a < v_n - b < b - a \Leftrightarrow a < v_n < 2b - a,$$

pode-se afirmar que,

$$\forall n \geq p_1, \ v_n > a.$$

Seja agora $L > 0$ qualquer. Como lim $u_n = +\infty$ e $\dfrac{L}{a} > 0$, existe $p_2 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$\forall n \geq p_2, \ u_n > \frac{L}{a}.$$

Considere-se $p = \max\{p_1, p_2\}$. Então, para todo o número natural $n \geq p$, tem-se

$$v_n > a \quad \text{e} \quad u_n > \frac{L}{a},$$

donde se conclui que

$$u_n \times v_n > a\frac{L}{a} = L, \ \forall n \geq p.$$

Logo

$$\lim(u_n v_n) = +\infty.$$

6. Como $\lim v_n = c$, e $c < 0$, considere-se, sem perda de generalidade que $a \in]c, 0[$. Então, existe $p_1 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo o número natural $n \geq p_1$, se tem

$$|v_n - c| < -a \Leftrightarrow a + c < v_n < -a + c$$

onde $-a + c < 0$. Pode afirmar-se assim que

$$-v_n > a - c > 0, \ \forall n \geq p_2.$$

Seja agora $L > 0$ qualquer e considere-se $\dfrac{L}{a-c} > 0$. Como $u_n \longrightarrow +\infty$, existe $p_2 \in \mathbb{N}$, tal que, para todo o

$$n \geq p_2, \ u_n > \frac{L}{a-c}.$$

Considere-se $p = \max\{p_1, p_2\}$ e tem-se que qualquer que seja o número $n \geq p$,

$$-u_n \times v_n = u_n \times (-v_n) > \frac{L}{a-c} \times (a-c) = L$$

Donde se conclui que

$$\lim(u_n v_n) = -\infty.$$

7. Considere-se $L > 0$. Como $|u_n| \longrightarrow +\infty$ e $|v_n| \longrightarrow \infty$, pode afirmar-se que existem $p_1 \in \mathbb{N}$ e $p_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|u_n| > \sqrt{L}, \ \forall n \geq p_1 \quad \text{e} \quad |v_n| \geq \sqrt{L}, \ \forall n \geq p_2.$$

Considere-se $p = \max\{p_1, p_2\}$. Então

$$|u_n \times v_n| > \sqrt{L} \times \sqrt{L} = L, \ \forall n \geq p$$

e conclui-se assim que

$$\lim |u_n \times v_n| = +\infty.$$

$\square$

Observação 3.11. Estas propriedades podem ser indicadas de um modo mais abreviado, como a seguir se exemplifica:

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
2. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;
3. $(-\infty) + a = -\infty$ ou $(+\infty) + a = +\infty$, $a \in \mathbb{R}$;
4. $\infty + a = \infty$, $a \in \mathbb{R}$;
5. $(-\infty) \times b = -\infty$ ou $(+\infty) \times b = +\infty$, $b \in \mathbb{R}^+$;
6. $(-\infty) \times c = +\infty$ ou $(+\infty) \times c = -\infty$, $c \in \mathbb{R}^-$;
7. $\infty \times \infty = \infty$.

Os símbolos

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty \quad \text{e} \quad \infty - \infty$$

são símbolos de indeterminação. Isto quer dizer que nestes casos o facto de existir ou não limite, bem como o seu valor, depende das sucessões envolvidas.

Exemplo 3.16. Considerem-se as sucessões de termos gerais $u_n = 5n^2 + 6$, $v_n = n^4 + 4$ e $w_n = n^4 + 1$. Como as sucessões (u_n) , (v_n) e (w_n) são infinitamente grandes positivos, as sucessões $(v_n - w_n)$ e $(u_n - w_n)$ correspondem a situações de indeterminação, sendo no entanto fácil estudá-las quanto à convergência.

$$\lim(v_n - w_n) = \lim \left[(n^4 + 4) - (n^4 + 1)\right] = 3$$

e

$$\lim(u_n - w_n) = \lim \left[(5n^2 + 6) - (n^4 + 1)\right] = \lim \left(-n^4 + 5n^2 + 5\right) = \lim \left[-n^4 \left(1 - \frac{5}{n^2} - \frac{5}{n^4}\right)\right] = -\infty.$$

Teorema 3.23. *Se (u_n) e (v_n) são duas sucessões, tendo (v_n) os termos todos diferentes de zero. Então:*

1. *Se (u_n) é um infinitamente grande e (v_n) tem limite finito, $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)$ é um infinitésimo;*
2. *Se (v_n) é um infinitésimo e (u_n) tem limite finito não nulo ou é um infinitamente grande, $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ é um infinitamente grande.*

Demonstração. 1. Por hipótese tem-se que $\lim |u_n| = +\infty$, e pelo ponto 1 do Teorema 3.20 vem que $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.

Como $\frac{v_n}{u_n} = v_n \times \frac{1}{u_n}$, aplicando o Teorema 3.10, tem-se que

$$\lim \frac{v_n}{u_n} = \lim v_n \times \lim \frac{1}{u_n}.$$

Donde se conclui que $\lim \frac{v_n}{u_n} = a \times 0 = 0$.

2. Por hipótese tem-se que $\lim v_n = 0$. Pelo ponto 2 do Teorema 3.20 tem-se que se

$$\lim \frac{1}{|v_n|} = +\infty.$$

Se $u_n \longrightarrow b$, em que $b \in \mathbb{R}$, pelo ponto 5 e 6 do Teorema 3.22 tem-se que,

$$\lim \left|\frac{u_n}{v_n}\right| = \infty.$$

Considere-se agora o caso em que $|u_n| \longrightarrow +\infty$. O quociente $\left|\frac{v_n}{u_n}\right|$ pode ser dado por $|v_n| \times \left|\frac{1}{u_n}\right|$, e pelo ponto 7 do teorema 3.22, tem-se que $\lim \left|\frac{u_n}{v_n}\right| = +\infty$.

□

Tal como no caso anterior, estas propriedades são por vezes representadas do seguinte modo:

$$\frac{b}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{0} = \infty \quad \text{e} \quad \frac{a}{0} = \infty \text{ com } a \neq 0.$$

Teorema 3.24. *Se $a > 1$ tem-se que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$, qualquer que seja $p \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como $a > 1$, considere-se $a = 1 + h$ com $h > 0$. Usando o binómio de Newton vem

$$a^n = (1+h)^n = 1 + nh + C_2^n h^2 + \ldots + h^n$$

e consequentemente,

$$\frac{a^n}{n} = \frac{1 + nh + C_2^n h^2 + \ldots + h^n}{n}$$

ou ainda

$$\frac{a^n}{n} > \frac{1 + nh + \dfrac{n(n-1)}{2}}{n},$$

donde se conclui que

$$\frac{a^n}{n} > \frac{1}{n} + h + \frac{n-1}{2}h^2.$$

Como

$$\lim\left(\frac{1}{n} + h + \frac{n-1}{2}h^2\right) = +\infty,$$

pelo Teorema 3.15 $\dfrac{a^n}{n^p} \longrightarrow +\infty$. □

Exemplo 3.17. Considerem-se as sucessões de termo geral

$$u_n = n, \quad v_n = 2^n, \quad w_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{e} \quad z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

As sucessões $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$, $\left(\dfrac{w_n}{z_n}\right)$ correspondem a situações de indeterminação. No entanto, facilmente se determinam os seus limites.

$$\lim\frac{u_n}{v_n} = \lim\frac{n}{2^n} = \lim\frac{1}{\dfrac{2^n}{n}} = 0 \text{ atendendo a que } \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2^x}{x^p} = +\infty,\ p \in \mathbb{N},$$

pelo Teorema 3.24.

$$\lim\frac{w_n}{z_n} = \lim\frac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \lim\sqrt{\frac{1}{n^3}} = \lim\frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{\lim n^3}} = 0.$$

3.9 Sucessões especiais

Nesta secção dar-se-á destaque a dois tipos de sucessões que são frequentemente utilizadas quer em simples exercícios de cálculo de limites, quer em problemas aplicados a situações reais: as sucessões cujo termo geral é definido por uma fração racional e a sucessão particular $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

3.9.1 Sucessões definidas por frações racionais

Este tipo de sucessões são muito usadas no estudo de indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, daí fazer-se neste trabalho um estudo genérico destes casos.

Considerem-se dois polinómios P e Q de graus p e k respetivamente, com $Q(x)$ sem raízes naturais e seja (u_n) a sucessão definida por

$$u_n = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \ldots a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \ldots b_1 n + b_0},$$

com $p,\ k \in \mathbb{N}$, $a_p \neq 0$ e $b_k \neq 0$.

Pode reescrever-se o termo geral da sucessão (u_n) da seguinte forma

$$\begin{aligned} u_n = \frac{P(n)}{Q(n)} &= \frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \ldots a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1} + \ldots b_1 n + b_0} \\ &= \frac{a_p n^p \left(1 + \frac{a_{p-1}}{a_p n} + \ldots + \frac{a_1}{a_p n^{p-1}} + \frac{a_0}{a_p n^p}\right)}{b_k n^k \left(1 + \frac{b_{k-1}}{b_k n} + \ldots + \frac{b_1}{b_k n^{k-1}} + \frac{b_0}{b_k n^k}\right)} \\ &= \frac{a_p n^p}{b_k n^k} \times \frac{1 + \frac{a_{p-1}}{a_p n} + \ldots + \frac{a_1}{a_p n^{p-1}} + \frac{a_0}{a_p n^p}}{1 + \frac{b_{k-1}}{b_k n} + \ldots + \frac{b_1}{b_k n^{k-1}} + \frac{b_0}{b_k n^k}} \end{aligned}$$

Note-se que cada uma das parcelas $\frac{a_{p-j}}{a_p n^j}$, com $j = 1, \ldots, p$ e $\frac{b_{k-i}}{b_k n^i}$, com $i = 1, \ldots, k$ converge para zero e portanto,

$$\lim \frac{1 + \frac{a_{p-1}}{a_p n} + \ldots + \frac{a_1}{a_p n^{p-1}} + \frac{a_0}{a_p n^p}}{1 + \frac{b_{k-1}}{b_k n} + \ldots + \frac{b_1}{b_k n^{k-1}} + \frac{b_0}{b_k n^k}} = 1.$$

Atendendo a que

$$\frac{a_p n^p}{b_k n^k} = \frac{a_p n^p}{b_k n^p n^{k-p}} = \frac{a_p}{b_k n^{k-p}},$$

surgem as situações seguintes:

i. No caso em que $p < k$, ou seja $k - p > 0$,

$$\lim \frac{a_p n^p}{b_k n^p n^{k-p}} = \lim \frac{a_p}{b_k n^{k-p}} = 0;$$

ii. Se $p = k$,

$$\lim \frac{a_p n^p}{b_k n^p n^{k-p}} = \lim \frac{a_p}{b_k} = \frac{a_p}{b_k};$$

iii. Quando $p > k$ vem que

$$\lim \frac{1}{n^{k-p}} = +\infty,$$

e o sinal do limite vai depender de a_p e b_k. Se tiverem o mesmo sinal o limite é $+\infty$, se tiverem sinais contrários o limite é $-\infty$.

Resumindo,

- Se o grau do polinómio P for menor do que o grau de Q, o limite da sucessão (u_n) é zero;
- Se P e Q tiverem o mesmo grau, o limite da sucessão (u_n) é dado por

  $$\lim u_n = \frac{a_p}{b_k};$$

- Se o grau de P for maior do que o grau de Q então a sucessão (u_n) é um infinitamente grande.

  Será um infinitamente grande positivo se a_p e b_k tiverem o mesmo sinal e um infinitamente grande negativo se a_p e b_k tiverem sinais contrários.

3.9.2 O número e

Diz-se que o número e é um dos, senão o número irracional mais misterioso e, simultaneamente mais querido dos matemáticos, apesar da sua popularidade não ser tão grande como a de pi

(π). Trata-se de um número transcendente, simultaneamente irracional e não algébrico, um número que não pode ser definido como raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros, por muitos considerado o "Príncipe da Aritmética"[12]. Faça-se, para já, uma apresentação do seu valor:

$$e = 2,71828182845904523536\ldots.$$

Este número foi de extrema importância para o desenvolvimento da ciência e da própria matemática nos últimos séculos. Antes da invenção dos computadores, foi exatamente com base no número e que os matemáticos e cientistas se apoiaram para executarem cálculos com a máxima precisão/exatidão, sobretudo no cálculo de juros compostos.
A história do e começa com John Napier, também conhecido por Neper, nascido em 1550 em Edimburgo, Escócia. Formado em Teologia, pela Universidade de St. Andrews na Escócia, tinha como passatempo experimentar novas formas de melhorar solos agrícolas através de sais. Foi o inventor de uma ferramenta matemática, à qual chamou de logaritmo. Segundo Napier, esta ferramenta era um meio de tornar consideravelmente mais simples e de agilizar o tempo despendido nos cálculos envolvendo multiplicação, divisão e extração de raízes. Napier apercebeu-se que os logaritmos têm propriedades muito especiais e que facilmente transformam multiplicações em adições e divisões em subtracções. Os logaritmos transformam também raízes em multiplicações. Nesta altura, em que os cálculos eram feitos à mão, estas simplificações eram consideradas mágicas e, a sua relevância estava a par de um computador aos dias de hoje [18], [21].
A a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ tem por limite o número de Neper, e,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Pode generalizar-se este resultado substituindo n por uma sucessão (u_n) que seja um infiniyamente grande.

Teorema 3.25. *Seja (v_n) a sucessão definida por*

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n}$$

onde a sucessão (u_n) *é um infinitamente grande positivo. Então*

$$\lim v_n = \lim \left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e.$$

Demonstração. Suponha-se que (u_n) é infinitamente grande positivo; então, pela definição de infinitamente grande positivo, para cada $L > 0$ existe uma ordem p tal que $u_n > L$, $\forall\, n > p$. Seja $k_n = [u_n]$, isto é, o maior número inteiro que não excede u_n, então

$$k_n \leq u_n < k_n + 1 \tag{3.18}$$

Como (u_n) é um infinitamente grande positivo, a partir de certa ordem todos os termos desta sucessão são positivos e verificam-se as desigualdades

$$\frac{1}{k_n+1} < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{k_n} \quad \text{e} \quad 1+\frac{1}{k_n+1} < 1+\frac{1}{u_n} \leq 1+\frac{1}{k_n}.$$

Atendendo a que $1+\frac{1}{k_n+1} > 1$, $1+\frac{1}{u_n} > 1$ e $1+\frac{1}{k_n} > 1$ e a 3.18, tem-se

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < \left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n} \leq \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}.$$

Como

$$\lim \left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} = \lim \left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{-1} \left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} = e \times 1 = e$$

e

$$\lim \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} = \lim \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{1} = e \times 1 = e,$$

porque $\left(\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}\right)$ e $\left(\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\right)$ são subsucessões de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, conclui-se, pelo teorema das sucessões enquadradas (Teorema 3.14), que

$$\lim v_n = e \quad \text{quando} \quad u_n \longrightarrow +\infty.$$

$\square$

Corolário 3.3. *Seja* (v_n) *a sucessão definida por*

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n}$$

onde a sucessão (u_n) *é um infinitamente grande negativo. Então*

$$\lim v_n = \lim \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e.$$

Demonstração. Suponha-se agora que (u_n) é um infinitamente grande negativo. Então, definindo $t_n = -u_n$, tem-se que $t_n \longrightarrow +\infty$ e

$$\begin{aligned}
\lim \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} &= \lim \left(1 - \frac{1}{t_n}\right)^{-t_n} \\
&= \lim \left(\frac{t_n - 1}{t_n}\right)^{-t_n} \\
&= \lim \left(\frac{t_n}{t_n - 1}\right)^{t_n} \\
&= \lim \left(1 + \frac{1}{t_n - 1}\right)^{t_n} \\
&= \lim \left(1 + \frac{1}{t_n - 1}\right)^{t_n - 1} \left(1 + \frac{1}{t_n - 1}\right) = e \times 1 = e,
\end{aligned}$$

Como $t_n - 1 \longrightarrow +\infty$ e $\lim \left(1 + \dfrac{1}{t_n - 1}\right) = 1$, vem que

$$\lim \left(1 + \frac{1}{u_n}\right)^{u_n} = e \times 1 = e,$$

quando $u_n \longrightarrow -\infty$. □

Proposição 3.6. *Se* (u_n) *é um infinitamente grande positivo ou negativo e* $x \in \mathbb{R}$, *então*

$$\lim \left(1 + \frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x.$$

Demonstração.

i. Suponha-se que $x \neq 0$. Então pode escrever-se

$$\lim\left(1+\frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{\frac{u_n}{x}}\right)^{\frac{u_n}{x}}\right]^x.$$

Pelo teorema 3.25 ou pelo corolário 3.3, quer $\left(\frac{u_n}{x}\right)$ seja um infinitamente grande positivo, quer $\left(\frac{u_n}{x}\right)$ seja um infinitamente grande negativo, tem-se que

$$\lim\left(1+\frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = \lim\left[\left(1+\frac{1}{\frac{u_n}{x}}\right)^{\frac{u_n}{x}}\right]^x = e^x.$$

ii. Se $x = 0$ a sucessão é constante e igual a 1:

$$\left(1+\frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = 1^{u_n} = 1 = e^0$$

e

$$\lim\left(1+\frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^0.$$

Donde se conclui que

$$\lim\left(1+\frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x,\ \forall\, x\ \in\ \mathbb{R}.$$

$\square$

Nota 3.3. $\lim\left(1+\frac{1}{u_n}\right)^{u_n}$ é um caso particular da sucessão $\left(1+\frac{x}{u_n}\right)^{u_n}$ quando $u_n \longrightarrow +\infty$.

3.9.3 Exercício

Considere-se a sucessão de termo geral $v_n = \left(\frac{cn+d}{an+b}\right)^n$, em que $a,\ b,\ c,$ e d são números inteiros, com a e c não nulos. Pretende-se calcular $\lim v_n$.

Resolução: Para calcular $\lim \left(\dfrac{cn+d}{an+b}\right)^n$, efetua-se a divisão inteira de $cn+d$ por $an+b$.

$$\frac{cn+d}{an+b} = \frac{c}{a} + \frac{d - \dfrac{cb}{a}}{an+b}$$

Para passar à forma $1 + \dfrac{x}{u_n}$, coloca-se em evidência $\dfrac{c}{a}$:

$$\frac{c}{a} + \frac{d - \dfrac{cb}{a}}{an+b} = \frac{c}{a}\left(1 + \frac{\frac{ad}{c} - b}{an+b}\right)$$

Assim,

$$\left(\frac{cn+d}{an+b}\right)^n = \left(\frac{c}{a}\right)^n \times \left(1 + \frac{\dfrac{ad}{c} - b}{an+b}\right)^n .$$

Analise-se agora a expressão $\left(1 + \dfrac{\dfrac{ad}{c} - b}{an+b}\right)^n$.

Atendendo a que $n = \dfrac{an+b-b}{n} = \dfrac{an+b}{a} - \dfrac{b}{a}$, pode escrever-se

$$\left(1 + \frac{\dfrac{ad}{c} - b}{an+b}\right)^n = \left(1 + \frac{\dfrac{ad}{c} - b}{an+b}\right)^{\frac{an+b}{a}} \left(1 + \frac{\dfrac{ad}{c} - b}{an+b}\right)^{-\frac{b}{a}}$$

Observe-se ainda que

$$\left(1 + \frac{\dfrac{ad}{c} - b}{a\left(n + \frac{b}{a}\right)}\right)^{n+\frac{b}{a}} = \left(1 + \frac{\dfrac{d}{c} - \dfrac{b}{a}}{n + \frac{b}{a}}\right)^{n+\frac{b}{a}}$$

e

$$\left(1 + \frac{\dfrac{ad}{c} - b}{an+b}\right)^{-\frac{b}{a}} = \left(1 + \frac{\dfrac{d}{c} - \dfrac{b}{a}}{n + \frac{b}{a}}\right)^{-\frac{b}{a}}$$

Tem-se assim que

$$\left(\frac{cn+d}{an+b}\right)^n = \left(\frac{c}{a}\right)^n \left(1+\frac{\frac{d}{c}-\frac{b}{a}}{n+\frac{b}{a}}\right)^{n+\frac{b}{a}} \left(1+\frac{\frac{d}{c}-\frac{b}{a}}{n+\frac{b}{a}}\right)^{-\frac{b}{a}}.$$

Analise-se agora o limite de cada um dos fatores.
No caso de $c_n = \left(\frac{c}{a}\right)^n$ surgem três situações possíveis:

1. Se $|c| < |a|$ vem que $\lim \left(\frac{c}{a}\right)^n = 0$.

2. Se $|c| > |a|$, tem-se $\left|\frac{c}{a}\right| > 1$ e portanto $\left(\left|\frac{c}{a}\right|^n\right)$ é um infinitamente grande positivo.

Se a e c forem ambos positivos ou ambos negativos a sucessão (c_n) é um infinitamente grande positivo; se a e c tiverem sinais contrários a sucessão (c_n) é um infinitamente grande em módulo, e neste caso, oscilante.

3. Se $|c| = |a|$, tem-se

$$\left(\frac{c}{a}\right)^n = \begin{cases} (-1)^n & \text{se} \quad c=-a \\ 1 & \text{se} \quad c=a \end{cases}.$$

No caso em que $c=-a$ a sucessão (c_n) diverge e caso $c=a$ a sucessão (c_n) converge para 1.

Considere-se agora a sucessão de termo geral $e_n = \left(1+\frac{\frac{d}{c}-\frac{b}{a}}{n+\frac{b}{a}}\right)^{n+\frac{b}{a}}$. Usando a proposição 3.6[1], onde (u_n) é neste caso o infinitamente grande positivo definido por $u_n = n+\frac{b}{a}$, pode afirmar-se que

$$\lim e_n = \lim \left(1+\frac{\frac{d}{c}-\frac{b}{a}}{n+\frac{b}{a}}\right)^{n+\frac{b}{a}} = e^{\frac{d}{c}-\frac{b}{a}}.$$

[1]A proposição afirma que, sendo (u_n) um infinitamente grande positivo,

$$\lim \left(1+\frac{x}{u_n}\right)^{u_n} = e^x.$$

O último fator a analisar é $d_n = \left(1+\dfrac{\dfrac{d}{c}-\dfrac{b}{a}}{n+\frac{b}{a}}\right)^{-\frac{b}{a}}$.

$$\lim d_n = \lim\left(1+\frac{\frac{d}{c}-\frac{b}{a}}{n+\frac{b}{a}}\right)^{-\frac{b}{a}} = (1+0)^{-\frac{b}{a}} = 1.$$

Conjugando a informação sobre os três fatores, vem:

1. Se $|c| < |a|$,

$$\lim\left(\frac{cn+d}{an+b}\right)^n = \lim\left(\frac{c}{a}\right)^n \lim\left(1+\frac{\dfrac{d}{c}-\dfrac{b}{a}}{n+\frac{b}{a}}\right)^{n+\frac{b}{a}} \lim\left(1+\frac{\dfrac{d}{c}-\dfrac{b}{a}}{n+\frac{b}{a}}\right)^{-\frac{b}{a}} = 0\times e^{\frac{d}{c}-\frac{b}{a}}\times 1 = 0.$$

2. Se $|c| > |a|$ a sucessão $\left(\dfrac{cn+d}{an+b}\right)^n$ é um infinitamente grande;

   (a) Se a e c têm o mesmo sinal,

   $$\lim\left(\frac{cn+d}{an+b}\right)^n = +\infty\times e^{\frac{d}{c}-\frac{b}{a}}\times 1 = +\infty$$

   (b) Se a e c têm sinais contrários a sucessão é um infintamente grande em módulo, sendo oscilante.

3. Se $|c| = |a|$, duas situações podem ocorrer:

   (a) Se $c = a$ a sucessão converge e o seu limite é

   $$\lim\left(\frac{cn+d}{an+b}\right)^n = 1\times e^{\frac{d}{c}-\frac{b}{a}}\times 1 = e^{\frac{d}{c}-\frac{b}{a}};$$

   (b) Se $c = -a$ a sucessão $\left(\dfrac{cn+d}{an+b}\right)^n$ diverge.

Exercício programado

Considere-se a sucessão de termo geral $v_n = \left(\dfrac{an-b}{an+b}\right)^n$[2]. O limite da sucessão é

correta1 $\lim v_n = e^{-\frac{2b}{a}}$

errada1 $\lim v_n = e^{2b}$

errada2 $\lim v_n = e^{-2b}$

errada3 $\lim v_n = e^{2}$

Analise-se os casos em que podem ocorrer escolhas iguais. Para a resolução do exercício vai ter-se em consideração que a função exponencial $e(x) = e^x$ é uma função injetiva.

correta1 = **errada1** ou seja, $e^{-\frac{2b}{a}} = e^{2b}$.

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{2b}{a}} = e^{2b} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{2b}{a} = 2b \\
&\Leftrightarrow \quad -2b = 2ab \ \wedge \ a \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -2b - 2ba = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -2b(1+a) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \ \vee \ a = -1
\end{aligned}$$

Tem que se excluir o caso em que $a = -1$ e $b = 0$ para que não ocorra esta igualdade.

correta1 = **errada2** ou seja, $e^{-\frac{2b}{a}} = e^{-2b}$.

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{2b}{a}} = e^{-2b} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{2b}{a} = -2b \\
&\Leftrightarrow \quad -2b = -2ab \ \wedge \ a \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -2b + 2ba = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 2b(-1+a) = 0 \Leftrightarrow b = 0 \ \vee \ a = 1
\end{aligned}$$

Tem que se excluir o caso em que $a = 1$ e $b = 0$ para não ocorrer a igualdade.

[2]caso particular do anterior (3(a)) onde $c = a$ e $d = -b$.

correta1 $=$ **errada3** ou seja, $e^{-\frac{2b}{a}} = e^2$.

$$\begin{aligned} e^{-\frac{2b}{a}} = e^2 &\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2 \\ &\Leftrightarrow -2b = 2a \\ &\Leftrightarrow b = -a \end{aligned}$$

Caso $b = -a$, faz-se uma nova escolha para b, por exemplo $b := 2a$.

errada1 $=$ **errada2** ou seja, $e^{2b} = e^{-2b}$.

$$e^{2b} = e^{-2b} \Leftrightarrow 2b = -2b \Leftrightarrow b = 0.$$

Esta situação nunca ocorre excluindo $b = 0$ no domínio dos parâmetros.

errada1 $=$ **errada3** ou seja, $e^{2b} = e^2$.

$$e^{2b} = e^2 \Leftrightarrow 2b = 2 \Leftrightarrow b = 1.$$

Esta situação apenas ocorre quando $b = 1$.

errada2 $=$ **errada3** ou seja, $e^{-2b} = e^2$.

$$e^{-2b} = e^2 \Leftrightarrow -2b = 2 \Leftrightarrow b = -1$$

Acontece a igualdade quando $b = -1$.

Atendendo às condições acima, basta escolher o domínio dos parâmetros

$$a, b \in \{-10, \ldots, 10\} \setminus \{-1; 0; 1\}.$$

Capítulo 4

Conclusão

O tema das sucessões suscita a curiosidade dos nossos alunos sobretudo quando é objeto de explorações envolvendo a criação/utilização de representações gráficas e aplicações informáticas que sustentem os conceitos apresentados. Estas abordagens criam também uma interdisciplinaridade entre as novas tecnologias de informação e comunicação e a matemática, que enriquecem substancialmente as competências de alunos e jovens tão necessárias ao seu competente ingresso num mercado de trabalho competitivo (em que o raciocínio prático e a resolução rápida e ágil de problemas poderá determinar o seu futuro).
"As salas de aulas estão, em geral, dotadas de determinados equipamentos que podem constituir uma mais-valia para a prática letiva. A tecnologia no Ensino Secundário deve, portanto, ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas e para o exercício de certos procedimentos; essa utilização deve, no entanto, ser criteriosa, já que, caso contrário, pode condicionar e comprometer gravemente a aprendizagem e a avaliação"[1].
O objetivo principal deste trabalho foi a construção de recursos digitais de apoio ao ensino das sucessões, para desta forma proporcionar aos alunos exercícios de escolha múltipla e a sua resolução, caso o aluno erre ou opte apenas por ver a sua resolução. Permite também aos alunos terem uma noção imediata do seu desempenho. Este tipo de recurso permite uma melhoria significativa no processo ensino /aprendizagem, já que desenvolve nos alunos uma maior autonomia, bem como uma maior consolidação/aplicação dos conhecimentos. Para o professor, a plataforma Siacua permite deversificar a prática letiva com aulas mais atrativas que levam a desenvolver nos alunos o gosto pela disciplina, e desta forma melhorarem o seus

resultados escolares.

> "Ensinar não é uma função vital, porque não tem o fim em si mesma; a função vital é aprender."(Aristóteles)

Bibliografia

[1] Ministério da Educação Programa e metas curriculares, Matemática A. Ensino Secundário, cursos cientifico humanisticos e ciências e tecnologias e de ciências socioeconómicas. em Ministério da Educação e Ciência, 2013.

[2] P. Cruz, P. Carvalho, Luís Descalço, P. Oliveira, D. Seabra Teaching Day. *Inovação Pedagógica na Universidade de Aveiro* 27 de Novembro de 2013.

[3] J. Campos Ferreira. Introdução à análise matemática. *Fundação Calouste Gulbenkian*, 2011.

[4] José Joaquim Magalhães de Sousa Pinto. Curso de análise matemática. *Universidade de Aveiro*, 2010.

[5] Sebastião e Silva,J.,Silva Paulo, J. Compêndio de Álgebra, Tomo 1-6º ano. *Livraria Rodrigues*, 1970.

[6] Soveral, Ana A.,Silva, Carmen Viegas. Matemática A, 11º ano, volume 3, 1ª edição. *Texto Editores*, 2005.

[7] Maria Augusta Ferreira Neves, Luís Guerreiro. Matemática , 12º ano , Acesso ao ensino superior. *Porto Editora*, 2010.

[8] Ana Maria Brito Jorge,Conceição Santos Alves, Cristina Cruchinho, Graziela Fonseca, Judite Barbedo, Manuela Simões. Matemática A, 11º ano. *Areal Editores*, 2011.

[9] Cristina Viegas, Sérgio Valente. Mat-11, volume 2. *Texto Editores*, 2016.

[10] Carlos Andrade, Paula Pinto Pereira, Pedro Pimenta. Novo Ípsilon 11- volume 2. *Raíz Editora*, 2016.

[11] Ana Isabel Matos. Sucessões Reais. *D Mat*, 18 de outubro de 2000.

[12] Bento de Jesus Caraça. Conceitos Fundamentais de Matemática *Tipografia Matemática Lda.*, Dezembro 1951.

[13] António Bento. Sucessões de números Reais. Mestrado integrado em Engenharia aeronautica. *Departamento de matemática da Universidade da Beira Interior*, 2013/2014.

[14] Ana Margarida Carrasco Correia Troncão. Mestrado em Matemática para professores. *Universidade de Lisboa*, 2012/2013.

[15] Yolanda Lima, Francelino Gomes. Xeqmat . Matemática 11º ano, 2ª edição. *Editorial o livro*, 1998.

[16] Ana Margarida Lourenço Martins. Relatório de Estágio . O ensino da sucessão de Neper *PDF-ubibliorum.*

[17] Belmiro Costa, Ermelinda Rodrigues. Novo Espaço . Matemática A-11º ano *Porto Editora*, 2014.

[18] O número e. *www.Testonline.com.br/numeroe.htm.*

[19] Curva de Koch. *https//pt.wikipedia/wiki/curva-de-koch*

[20] O floco de neve Koch. *http://gigamatematica.blogspot.pt/2011/07/o-floco-de-neve-koch.html*

[21] História dos logaritmos. *www.infoescola.com/matematica/historia-dos-logaritmos*

[22] SIACUA *http://siacua.web.ua.pt/*